

天体运动:万有引力定律

万有引力定律全景:从开普勒三定律到三大宇宙速度,辅以球壳引力、双星三星、天体能量等专题与例题精解。

2026年6月7日 · 物理竞赛 · 微积分

历史

历史上,托勒密提出了**地心说**,认为地球是宇宙的中心.

后来,哥白尼通过天文观测等事实证据,提出了**日心说**(西方人往往认为哥白尼/伽利略等人是科学的鼻祖)

一般来讲,科学研究的一般过程是:

事实证据/观测 $\rightarrow$ 理论 $\rightarrow$ 实验

第谷为了证明**地心说**,进行了大量观测,并委任徒弟开普勒进行数学证明. 第谷死后,开普勒利用第谷的数据发现了**开普勒三定律**,这与第谷的本意 背道而驰

开普勒三定律

- 第一定律(轨道定律):行星绕太阳运动的轨迹为椭圆,太阳在椭圆的一个焦点上
- 第二定律(面积定律):行星绕太阳单位时间扫过的面积相同
- 第三定律(周期定律):绕太阳运动的行星,若设其半长轴为 a ,太阳质量为 M ,则 $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$

开普勒第二定律

开普勒第二定律本质上是有心力作用下**角动量L守恒**的体现:

由于万有引力是有心力,太阳/行星系统 所受的合外力力矩为零,所以有

$$L = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} = C$$
$$\delta = \frac{dS}{dt} = \frac{\frac{1}{2}rvdt \sin \theta}{dt} = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2}C$$

结论:角动量守恒与开普勒第二定律等价(本质上 $\Leftrightarrow$ 充要条件)

开普勒第三定律

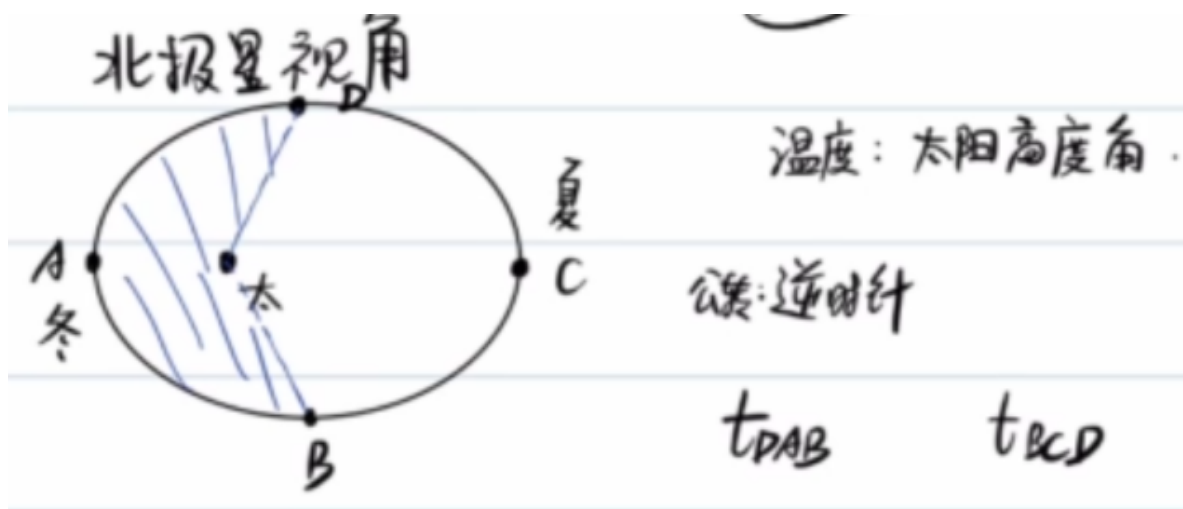
这里给出不严密的证明:

设椭圆轨道退化为圆,则半长轴退化为轨道半径

$$\frac{GMm}{R^2} = m \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

一:北极星视角



从北极星看地球,地球逆时针**自转**,绕太阳逆时针**公转**

在北半球的**夏至日**,地球反而在**远日点**;在北半球的**冬至日**,地球反而在**近日点**.

温度的差异主要来自于**太阳高度角**

由开普勒第二定律,不难得出 $S_{DAB} < S_{BCD}$, $t_{DAB} < t_{BCD}$

二:万有引力定律

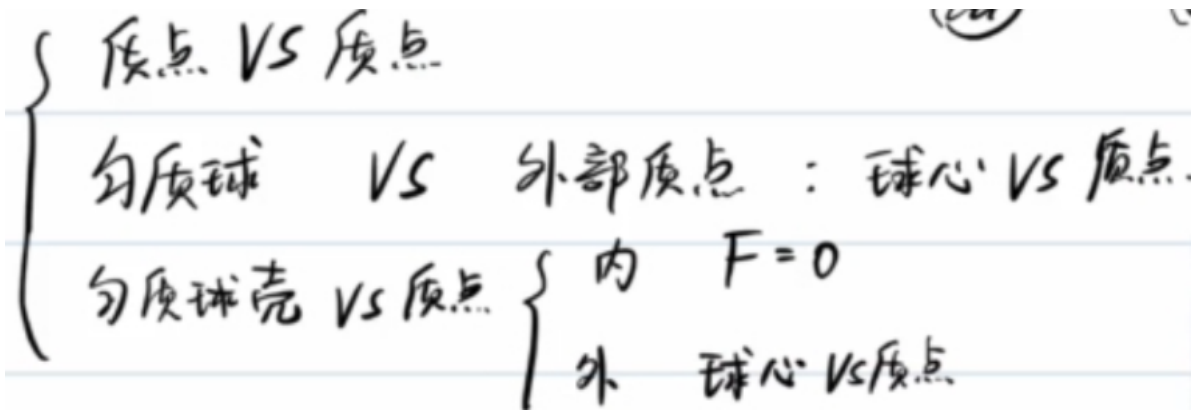
对于质量分别为 M, m 的两质点:

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

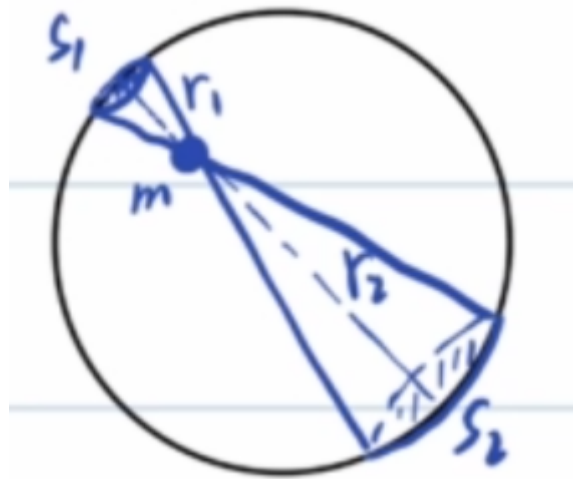
$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

其中 M, m 质量定义可由惯性定义导出,也可有引力定义导出

非质点的情况如下图:



质点和均匀球壳



设均匀球壳的面密度 ρ ,我们考虑质元的配对:

$$F_1 = \frac{G\rho S_1 m}{r_1^2}$$

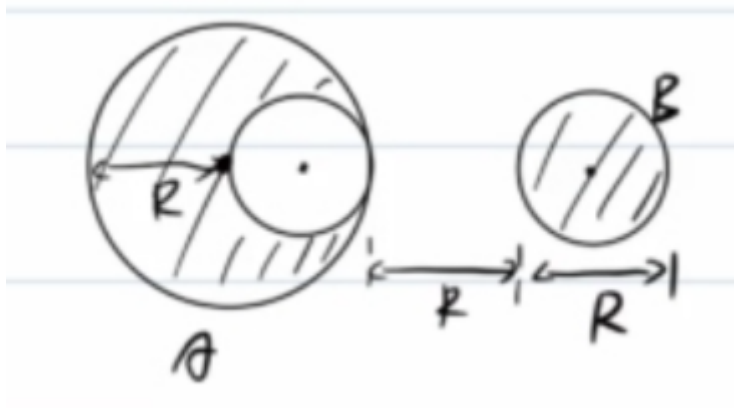
$$F_2 = \frac{G\rho S_2 m}{r_2^2}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$$F_1 = F_2$$

可见所有球壳微元对内部质点的引力合力为0.

例1



对于总质量为M,半径为R的均质球A,以半径R为直径切出一个小球B,放在大球右侧,使得B的圆心在被切除的半径所在直线上,两者最接近的两点距离为R,求A,B间的作用力

考虑补全A为一个假想球A':

$$F = \frac{GM\frac{M}{8}}{(\frac{5}{2}R)^2} - \frac{G\frac{M}{8}\frac{M}{8}}{(2R)^2}$$

例2

计算近地卫星,同步卫星,赤道上居民的运动参量:

$$\begin{aligned} \frac{GMm}{R^2} &= m \frac{4\pi^2}{T_{\text{近}}^2} R \\ T_{\text{近}} &= 84\text{min} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{GMm}{R_{\text{同}}^2} &= m \frac{4\pi^2}{T^2} R_{\text{同}} \\ R_{\text{同}} &\approx 7R \end{aligned}$$

对于赤道上的居民,情况有所不同:

$$\begin{aligned} \frac{GMm}{R^2} - N &= m \frac{4\pi^2}{T^2} R \\ N = G = mg &= \frac{GMm}{R^2} - m \frac{4\pi^2}{T^2} R \end{aligned}$$

从这一点上看,重力G是万有引力的分力.

体重秤从来不能反映人所受的万有引力(除非您是一头站在北极点的 polar bear),体重秤显示的是**视重N**

估算一下我在赤道上所受向心力的大小:

$$F_n = m \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

$$= 75 \frac{4\pi^2}{(86400)^2} (6400 \times 10^3) \approx 2.5 N$$

相比于近似750N的重力,向心力微不足道.



如果我不在赤道上,那么为了保持绕地轴做圆周运动,我还会受到地面的摩擦力f.

容易知道,纬度越高,视重越接近万有引力,重力加速度更大.

(此处应该有弹簧秤侦探小故事?)

总之,如果忽略地球自转,有:

$$\frac{GMm}{R^2} = mg$$

$$GM = gR^2$$

国外的教材称之为Golden Rule,中国人因此称之为黄金代换(到底黄金在哪里呢?)

例3

设近地卫星周期为T,求地球的平均密度 ρ

$$\begin{aligned}\frac{GMm}{R^2} &= m \frac{4\pi^2}{T^2} R \\ \frac{M}{R^3} &= \frac{4\pi^2}{GT^2} = \frac{4}{3}\pi\rho \\ \rho &= \frac{3\pi}{GT^2}\end{aligned}$$

例3'

中子星脉冲的周期约为 $T = \frac{1}{30}s$, 估算其密度

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} \approx 1.3 \times 10^{15} kg/m^3$$

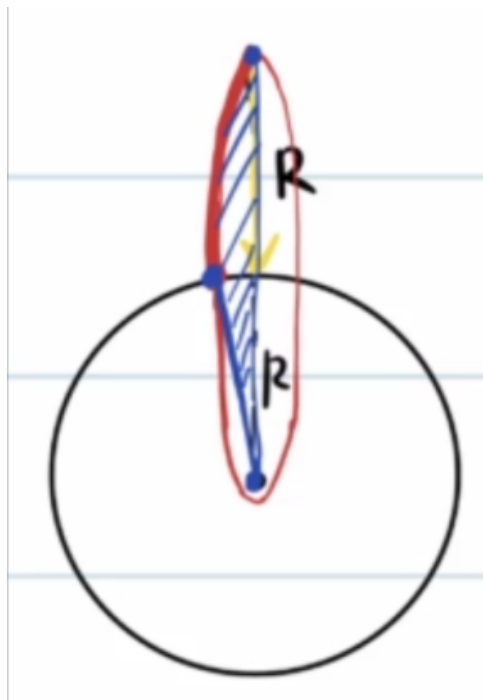
例4

将一个质点从地表上方 R 处 (R 为地球半径) 释放, 求到达地面的时间 t .

不难看出, 释放瞬间 $a_0 = \frac{1}{4}g$, 落地时 $a_t = g$, 显然此时不能使用匀加速运动公式.

椭圆有两种退化的结果:

- 圆 ($e \rightarrow 0$)
- 线段 ($e \rightarrow 1$)



例4的情况相当于椭圆退化为线段 ($e \rightarrow 1, a \rightarrow R$), 那么便可以运用开普勒第二/三定律求运动时间.

以下是我们所知的所有相关公式:

$$\delta = \frac{dS}{dt}$$

$$T = \frac{S}{\delta}$$

$$S = \pi ab$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

于是可以得到:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}}$$

$$\frac{t}{T} = \frac{S'}{S}$$

$$S' = \frac{1}{4}\pi ab + \frac{1}{2}ab, S = \pi ab$$

$$t = T \frac{\pi + 2}{4\pi} = \frac{\pi + 2}{4\pi} \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}}$$

$$= \frac{\pi + 2}{2} \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

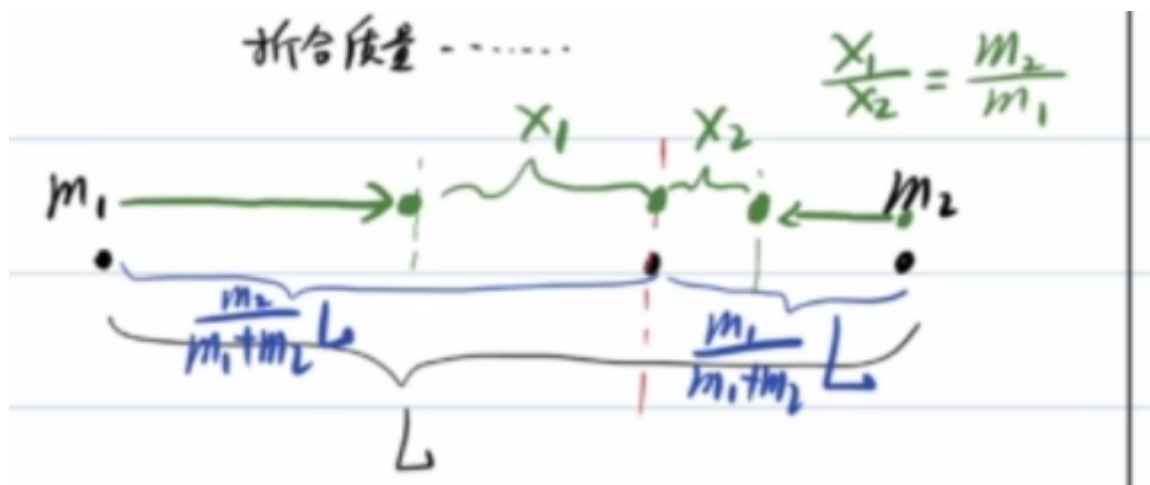
例5(4+)

两个质量分别为 m_1, m_2 的质点,距离为 L ,二者同时由静止释放,求二者相遇所用时间 t .

不难看出,系统所受合外力为0,二者质心静止不动,且二者相撞之处为质心.

法一:根据相对加速度,得出一个折合质量.

法二:等效法



由质心定义: $m_1 x_1 = m_2 x_2$,其中 x_1, x_2 为两质点到质心的距离.

记 F_{ab} 是a受到b的力,则:

$$F_{12} = \frac{Gm_1m_2}{(x_1 + x_2)^2} = \frac{Gm_1m_2}{(x_1 + \frac{m_1}{m_2}x_1)^2}$$

$$= \frac{G\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}m_1}{x_1^2}$$

那么, m_1 所受 m_2 的引力可以视为O点处质量为 $\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}$ 的质点对 m_1 的引力.

于是,例5转化为了例4的closed case.

$$m_1 \text{ 初始到质心的距离 } d_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}L$$

由开普勒第二/三定律

$$\frac{(\frac{d_1}{2})^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2(\frac{d_1}{2})^3}{GM}} = \pi\sqrt{\frac{d_1^3}{2GM}}$$

$$t = \frac{1}{2}T = \pi\sqrt{\frac{(\frac{m_2}{m_1+m_2}L)^3}{8G(\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2})}}$$

$$= \pi\sqrt{\frac{L^3}{8G(m_1+m_2)}}$$

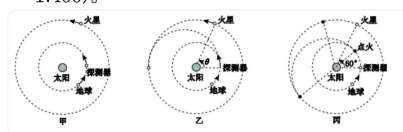
例6

从地球表面向火星发射火星探测器,设地球和火星在同一平面内绕太阳做同向圆周运动,火星轨道半径 $r_{\text{火}}$ 为地球轨道半径 $r_{\text{地}}$ 的1.50倍。简单而又比较节省能量的发射过程可分为两步进行:

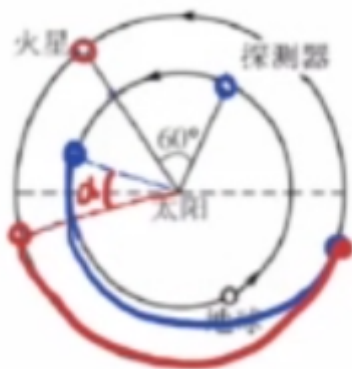
第一步:在地球表面用火箭对探测器进行加速,使之获得足够动能,从而脱离地球引力作用成为一个沿地球轨道运动的人造卫星(如图甲所示);

第二步:在适当时刻点燃与探测器连在一起的火箭发动机,在短时间内对探测器沿原方向加速,使其速度数值增加到适当值,从而使得探测器沿着一个与地球轨道及火星轨道分别在长轴两端相切的半个椭圆轨道正好射到火星上(如图乙所示)。

当探测器脱离地球并沿地球公转轨道稳定运行后,在某年3月1日零时测得探测器与火星之间的角距离为 60° (火星在前,探测器在后),如图丙所示。问应在何年何月何日点燃探测器上的火箭发动机,方能使探测器恰好落在火星表面?(时间计算仅需精确到日,已知 $\sqrt{(1.5)^3} = 1.840$, $\sqrt{(1.25)^3} = 1.400$)。



$$\text{半椭圆轨道的半长轴 } a = \frac{R_m + R_0}{2} = 1.25R_0$$



稍加分析,可知探测器与火星间的角距离 α 不断缩小.

那么,我们只需要让火星运行 $\pi - \alpha$ 角度和探测器运动 π 角度的时间相同即可.

为了叙述方便,把地球,火星,探测器分别称为(e)arth,(m)ars,(r)over

$$\begin{aligned}
 T_e &= 365 \text{ day} \\
 T_m &= T_e \sqrt{1.5^3} = 671 \text{ day} \\
 T_r &= T_e \sqrt{1.25^3} = 510 \text{ day} \\
 \frac{1}{2} T_r &= 255 \text{ day} \\
 \frac{\pi - \alpha}{2\pi} T_m &= \frac{1}{2} T_r \\
 \alpha &= \frac{161}{671} \pi \\
 \frac{\pi}{3} - \alpha &= \left(\frac{2\pi}{T_e} - \frac{2\pi}{T_m} \right) t \\
 t &\approx 37 \text{ day}
 \end{aligned}$$

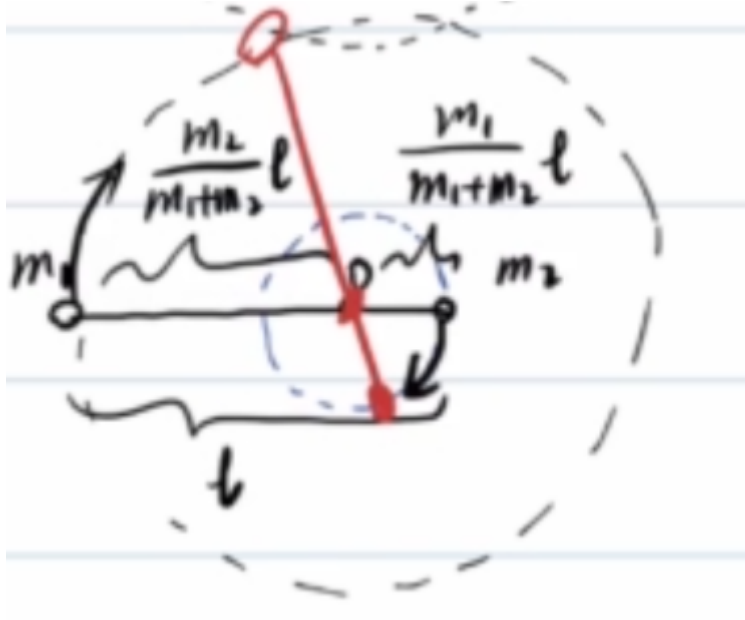
3月1日零时往后推30天为3月31日零时,后推37天则是4月7日零时.

故**4月7日点火**.

双星问题

设两个质量均为 m 的质点之间的运动达到稳定,二者距离为 l ,系统合外力为0,动量守恒,质心不动.

$$\begin{aligned}
 G \frac{mm}{l^2} &= m \frac{4\pi^2 l}{T^2} \\
 T &= 2\pi \sqrt{\frac{l^3}{G(2m)}}
 \end{aligned}$$



一般地,若两质点质量分别为 m_1, m_2 ,则质心到 m_1 距离为 $\frac{m_2}{m_1+m_2}l$

$$G \frac{m_1 m_2}{l^2} = m_1 \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{m_2}{m_1 + m_2} l$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l^3}{G(m_1 + m_2)}}$$

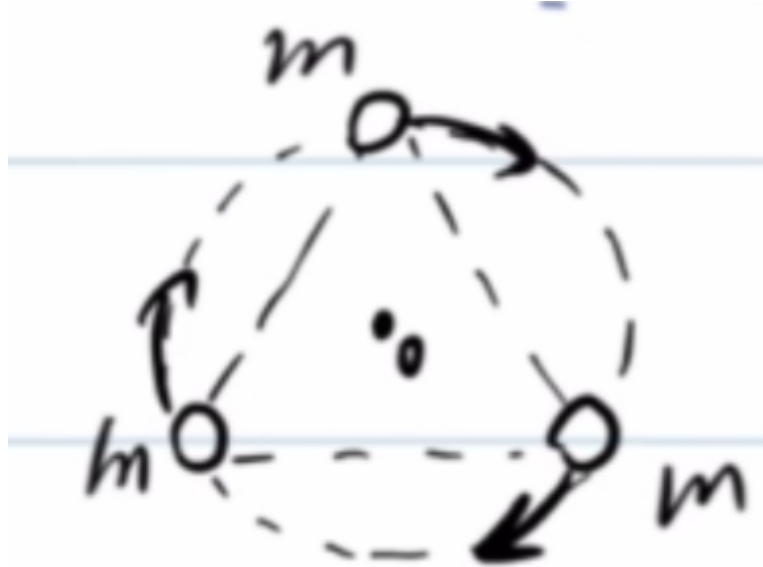
三星问题

情况一



$$\frac{Gmm}{r^2} + \frac{Gmm}{(2r)^2} = m \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

情况二



$$2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Gmm}{(\sqrt{3}r)^2} = m \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

三:天体能量

引力势能

设无穷远处为势能零点,则质量为 M, m 的质点之间引力势能为:

$$E = -\frac{GMm}{r} = -W$$

其中, W 是 m 从无穷远点运动到 r 处引力做的功.

证明

$$W = \int_{\infty}^r \frac{GMm}{r^2} dr = \frac{GMm}{r}$$

这是一个典型的反常积分

或者考虑微元法累加:

$$\begin{aligned}\Delta W_1 &= \frac{GMm}{r_1 r_2} (r_2 - r_1) = GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ \Delta W_2 &= \frac{GMm}{r_2 r_3} (r_3 - r_2) = GMm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) \\ &\dots \\ \sum \Delta W &= GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_n} \right) \\ &= \int_{\infty}^r \frac{GMm}{r^2} dr = \frac{GMm}{r} (r_1 \rightarrow \infty, r_n = r)\end{aligned}$$

椭圆轨道总能量

证明:椭圆轨道的总能量

$$E = E_k + E_p = -\frac{GMm}{2a}$$

根据机械能守恒,只要算出轨道上任意一点的机械能即可.



设近日点(n)ear速度为 v_n ,远日点(f)ar速度为 v_f .

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2}mv_n^2 + \left(-\frac{GMm}{a-c}\right) \\
 &= \frac{1}{2}mv_f^2 + \left(-\frac{GMm}{a+c}\right) \\
 L &= mv_n(a-c) = mv_f(a+c) \\
 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2\left(\frac{a+c}{a-c}\right)^2 + \left(-\frac{GMm}{a-c}\right) &= \frac{1}{2}mv_f^2 + \left(-\frac{GMm}{a+c}\right) \\
 \Rightarrow \begin{cases} v_f^2 = GM\left(\frac{a-c}{a+c}\right)\frac{1}{a}, \\ v_n^2 = GM\left(\frac{a+c}{a-c}\right)\frac{1}{a} \end{cases} \\
 E &= \frac{1}{2}mGM\left(\frac{a+c}{a-c}\right)\frac{1}{a} + \left(-\frac{GMm}{a+c}\right) \\
 &= -\frac{GMm}{2a}
 \end{aligned}$$

显然,在各种圆锥曲线中,椭圆(闭合曲线)的能量最小,不闭合的曲线能量更大.

- 椭圆: $E < 0$
- 抛物线: $E = 0$
- 双曲线: $E = \frac{GMm}{2a} > 0$

四:宇宙速度

宇宙速度:从地球表面发射卫星为达到不同效果而需要的不同初速度

第一宇宙速度

$v_1=7.9\text{km/s}$,又称**环绕速度**

$$\frac{GMm}{R^2} = m\frac{v_1^2}{R}, v_1 = \sqrt{gr}$$

第二宇宙速度

$v_2 = 11.2\text{km/s}$,又称**脱离速度**

$$E = \frac{1}{2}mv_2^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = 0, v_2 = \sqrt{2gr} = \sqrt{2}v_1$$

第三宇宙速度

$v_3 = 16.7\text{km/s}$,又称**逃逸速度**

相对于太阳离开到无穷远(先离开地球,再离开太阳)

第一步的机械能守恒以地球(e)arth为系,第二步以太阳(s)un为系.

$$\frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{GM_em}{R} = \frac{1}{2}mv_3'^2$$

$$\frac{1}{2}m(v_3' + v_e)^2 + \left(-\frac{GM_sm}{R_s}\right) = 0$$

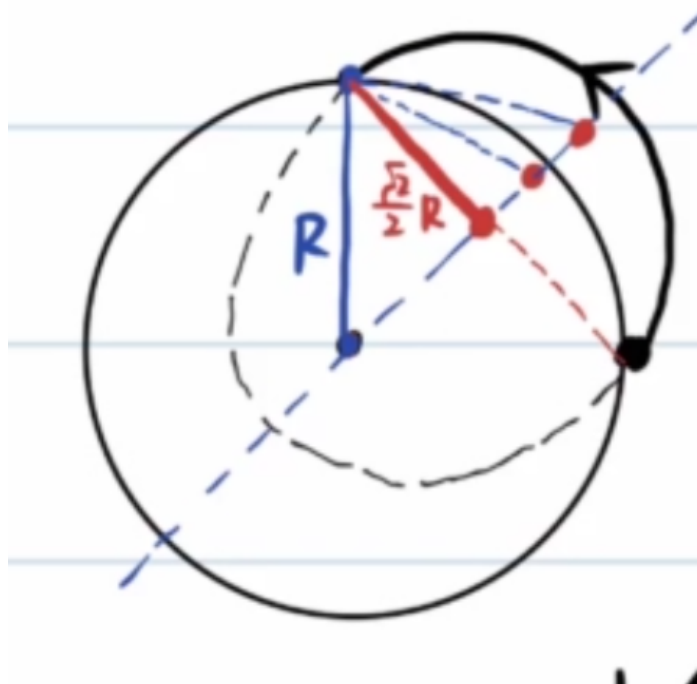
例7

不计地球自转,从赤道上发射一颗导弹,使之能击中北极点,求最小发射速度.

已知: G ,地球半径 R ,地球质量 M

$$E = \left(-\frac{GMm}{R}\right) + \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v_{min} \leftarrow E_{min} \leftarrow \frac{-GMm}{2a} \leftarrow a_{min}$$



由椭圆的第一定义, $2a_{min} = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})R$

$$E = \left(-\frac{GMm}{R}\right) + \frac{1}{2}mv_{min}^2 = -\frac{GMm}{(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})R}$$

于是不难看出:

- 近地导弹不是初速度最小的方案

- 如果初速度小于 v_1 ,则 $2a < R$,椭圆轨道必定与地球相交

写在最后

回头看看,这一路从第谷的执拗、开普勒的"背叛",走到了三大宇宙速度.

如果要把整篇浓缩成几句话:

- **开普勒第二定律** 的本质是角动量守恒,**第三定律** 则在圆轨道近似下一眼可证;
- 均匀球壳对内部质点引力为零,对外部则等效于质心处的一个质点——这是处理一切球体引力的钥匙;
- 重力只是万有引力的一个分力,体重秤量的从来是 **视重**(除非您真是北极点上那头 polar bear);
- **黄金代换** $GM = gR^2$ 几乎贯穿所有估算,虽然黄金到底在哪还是个谜;
- 椭圆轨道总能量 $E = -\frac{GMm}{2a}$ 只和半长轴有关,于是椭圆退化成线段时,自由落体、双星相遇这类"看似不能用匀加速"的问题,都能被开普勒定律一网打尽;
- 三大宇宙速度 $v_1 : v_2 : v_3 = 7.9 : 11.2 : 16.7$,分别对应环绕、脱离、逃逸——而最小发射速度的方案,往往不是你以为的那条近地轨道.

万有引力把苹果和行星写进了同一个公式里.下次抬头看见远日点的夏天,大概就能会心一笑了.