

微积分基础导论:微积分应用2

以微积分为工具求解物理问题：从机械能守恒、简谐运动与弹性势能，到曲率半径、虚功原理与变质量绳，再到微元法运动学与刚体转动惯量，串联力学中的微分方程与积分思想。

2026年5月26日 · 物理竞赛 · 微积分

微积分在物理学中的应用

力学 { 运动 $\Rightarrow \vec{x}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}, \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$
静力 $\Rightarrow$ 虚功原理 $\vec{x}(t)$ 函数
动力 $\Rightarrow$ 牛二 $\vec{F} = m\vec{a}, \vec{F}(t), \vec{x}_0$ 已知 $\Rightarrow \vec{a}(t) \Rightarrow \vec{v}(t) \Rightarrow \vec{x}(t)$

电磁
热学
光学
...

动量、能量守恒
 $\hookrightarrow \Delta p = Ft, m\Delta v = F\Delta t, F = m\frac{dv}{dt} = \frac{dp}{dt}$

例1

$$\begin{aligned} mgh + \frac{1}{2}mv^2 &= C \\ v &= \frac{dh}{dt} \\ mgh + \frac{1}{2}m\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 &= C \\ \frac{dh}{dt} &= \sqrt{\frac{2(C - mgh)}{m}} \\ dt &= \sqrt{\frac{m}{2(C - mgh)}} dh = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{C}{m} - gh\right)^{-\frac{1}{2}} dh \\ \int_0^t dt &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{h_0}^{h_t} \left(\frac{C}{m} - gh\right)^{-\frac{1}{2}} dh \\ t &= -\frac{\sqrt{2}}{g} \left(\frac{C}{m} - gh_t\right)^{\frac{1}{2}} + C' \end{aligned}$$

例2

在简谐运动中:

$$\vec{F} = -k\vec{x}, \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}, \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{-k}{m}\vec{x}$$

构建的微分方程:

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{-k}{m}\vec{x}$$

备选的 $x(t)$:

- $A \cos(\omega t + \phi)$
- $A \sin(\omega t + \phi)$
- $e^{\omega t + \phi}$

但 $\frac{-k}{m} < 0$,可以排除 $e^{\omega t + \phi}$

设 $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$,则:

$$\begin{aligned} v(t) &= Aw \cos(\omega t + \phi) \\ a(t) &= -Aw^2 \sin(\omega t + \phi) = \frac{-k}{m} A \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

解得: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \phi = \arcsin \frac{x_0}{A}$

结合机械能守恒,可以推出弹簧弹性势能的表达式:

在弹簧振子位于平衡位置时, 设 $E_{p_0} = 0$, 弹性势能最小, 速度最大.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 + E_p &= C \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ v(t) &= Aw \cos(\omega t + \phi) \\ C &= \frac{1}{2}m(Aw)^2 \end{aligned}$$

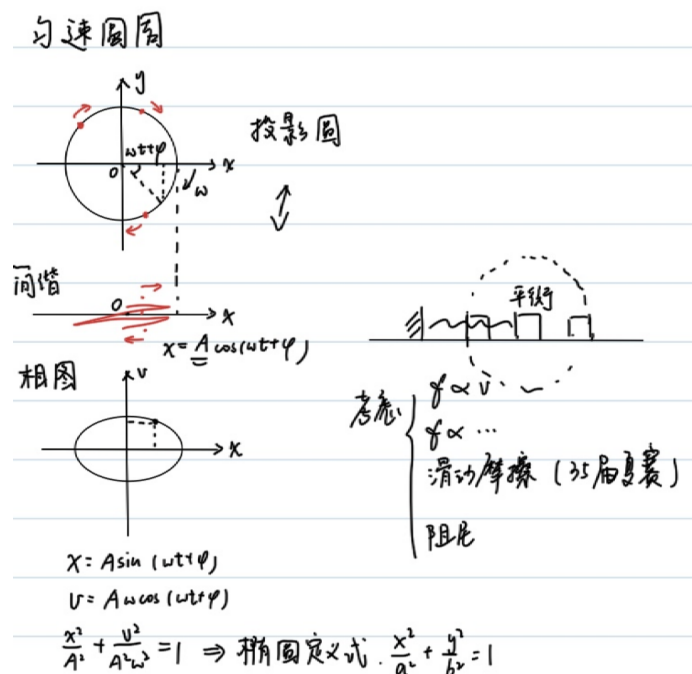
解得: $E_p = \frac{1}{2}m(Aw \sin(\omega t + \phi))^2 = \frac{1}{2}kx^2$

[!NOTE] 熟知简谐运动可以与匀速圆周运动一一对应

圆上的一个点可以确定运动的位移与速度的大小及方向

对于简谐运动, 如果做出 $v - x$ 图, 那么图像将会是椭圆:

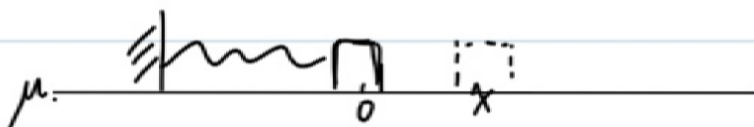
$$\begin{cases} x = A \sin(\omega t + \phi) \\ y = A\omega \cos(\omega t + \phi) \\ \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2\omega^2} = 1 \end{cases}$$



例3

(35届复赛第二题-简化版)

35届复赛第二题.



最大静摩擦 = 滑动摩擦

在平衡位置左边某处 $-A_0$ 释放. 向右运动停在平衡位置右侧. 已知 k, m, μ . 求 A_0 满足条件 & 停止位置.

首先, 为了在一开始能运动, 必须满足:

$$\begin{aligned} kA_0 &> \mu mg \\ A_0 &> \frac{\mu mg}{k} \end{aligned}$$

再列出运动过程的能量守恒:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}kA_0^2 = \frac{1}{2}kx^2 + (A_0 + x)\mu mg, \\ kx < \mu mg \rightarrow x \in (0, \frac{\mu mg}{k}) \end{cases}$$

解得:

$$A_0^2 = x^2 + \frac{2}{k}(A_0 + x)\mu mg \in (\frac{2\mu mg}{k}A_0, \frac{2\mu mg}{k}A_0 + \frac{3\mu^2 m^2 g^2}{k^2})$$

即:

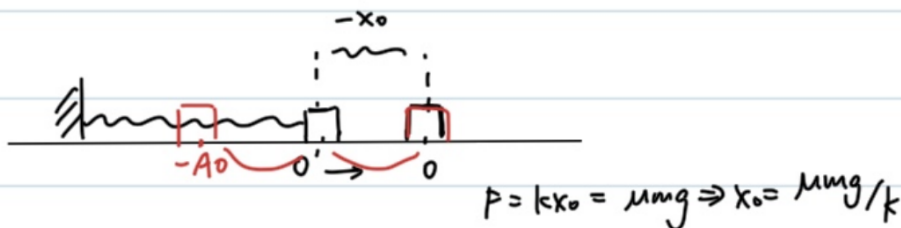
$$(A_0 - \frac{\mu mg}{k})^2 \in (\frac{\mu^2 m^2 g^2}{k^2}, \frac{4\mu^2 m^2 g^2}{k^2})$$

(Aha)最后得到:

$$A_0 \in (\frac{2\mu mg}{k}, \frac{3\mu mg}{k})$$

另解:(合成弹力和摩擦力, 利用简谐运动的对称性)

2) "新平衡位置" $\Rightarrow$ 恰好达到最大静摩擦



物体向右运动

γ 方向向左. O' 处新平衡位置. 简谐

1) $-A_0$ 对 O' 对称位置. 在 O 右侧 $\Rightarrow -2x_0 + A_0 > 0$

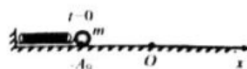
2) 且此时无法再向左运动 $\Rightarrow (A_0 - 2x_0) \cdot k < \mu mg$

$$\frac{2\mu mg}{k} < A_0 < \frac{3\mu mg}{k}$$

二、(40分) 如图, 一劲度系数为 k 的弹簧左端固定, 右端连一质量为 m 的小球; 弹簧水平, 它处于自然状态时小球位于坐标原点为 O ; 小球可在水平地面上滑动, 它与地面之间的动摩擦因数为 μ 。初始时小球速度为零, 将此时弹簧相对于其原长的伸长记为

$-A_0$ ($A_0 > 0$, 但 A_0 并不是已知量)。重力加速度大小为 g , 假设最大静摩擦力等于滑动摩擦力。

- (1) 如果小球至多只能向右运动, 求小球最终静止的位置, 和此种情形下 A_0 应满足的条件;
- (2) 如果小球完成第一次向右运动至原点右边后, 至多只能向左运动, 求小球最终静止的位置, 和此种情形下 A_0 应满足的条件;
- (3) 如果小球只能完成 n 次往返运动 (向右经过原点, 然后向左经过原点, 算 1 次往返), 求小球最终静止的位置, 和此种情形下 A_0 应满足的条件;
- (4) 如果小球只能完成 n 次往返运动, 求小球从开始运动直至最终静止的过程中运动的总路程。



原题目

曲率半径

一个曲线运动可以看成若干圆周运动的加和, 各物理量满足:

$$\begin{cases} \vec{F} = m \frac{\vec{v}^2}{\rho}, \\ \vec{a}_n = \frac{\vec{v}^2}{\rho} \hat{n}, \\ a_n = \frac{|\vec{a} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}, \quad a_t = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \end{cases}$$

例4

求抛物线 $y = x^2$ 在 $x = 0$ 处的曲率半径

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (x, x^2) \\ \vec{v} &= \left(\frac{dx}{dt}, 2x \frac{dx}{dt} \right) \\ \vec{a} &= \left(\frac{d^2x}{dt^2}, 2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2x \frac{d^2x}{dt^2} \right) \end{aligned}$$

不妨设 $\frac{dx}{dt} = 1$, 即质点在水平方向作匀速运动, 在 $x = 0$ 处, 向心加速度沿 y 轴方向, 切向加速度为 0:

$$a_n = |\vec{a}| = 2, \vec{v} = (1, 0), |\vec{v}| = 1, \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{1}{2}$$

例5

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 求端点处的曲率半径.

如果设水平速度恒定, 会导致在长轴处出现问题; 设竖直速度恒定, 短轴处也会出问题

我们采取极坐标换元:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (a \cos(\omega t + \phi), b \sin(\omega t + \phi)) \\ \vec{v} &= (-a\omega \sin(\omega t + \phi), b\omega \cos(\omega t + \phi)) \\ \vec{a} &= (-a\omega^2 \cos(\omega t + \phi), -b\omega^2 \sin(\omega t + \phi))\end{aligned}$$

在 $(0, b)$ 处, $\omega t + \phi = \frac{\pi}{2}$.

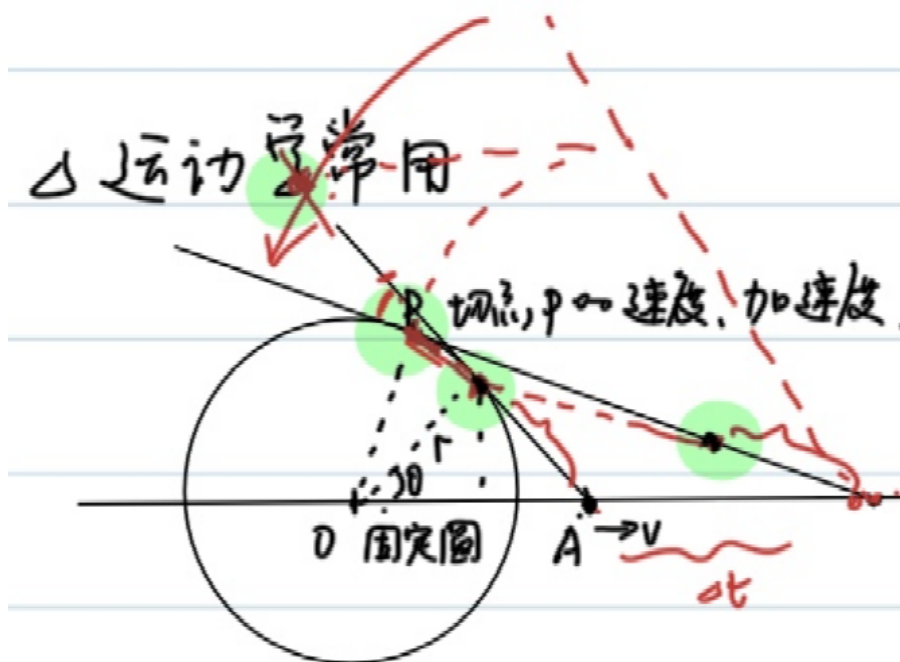
$$\begin{aligned}\vec{v} &= (-a\omega, 0) \\ \vec{a}_n = \vec{a} &= (0, -b\omega^2) \\ \rho &= \frac{|v|^2}{|a_n|} = \frac{a^2}{b}\end{aligned}$$

在 $(a, 0)$ 处, $\omega t + \phi = 0$.

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (0, b\omega) \\ \vec{a}_n = \vec{a} &= (-a\omega^2, 0) \\ \rho &= \frac{|v|^2}{|a_n|} = \frac{b^2}{a}\end{aligned}$$

例6

一根支在固定圆上的长木棍, 一端A在地面上做速度为 v 的匀速运动, 求交点P与接触点E速度.



$$A(x, 0)$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$P\left(\frac{r^2}{x}, r\sqrt{1 - \frac{r^2}{x^2}}\right)$$

$$\vec{v}_p = \left(v \frac{-r^2}{x^2}, v \frac{r^3}{x^3} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{x^2}}}\right)$$

类似的，我们求接触点E速度。注意接触点的约束条件不是在圆上，而是到A点距离不变。

$$\vec{AP} = \left(\frac{r^2}{x} - x, r\sqrt{1 - \frac{r^2}{x^2}}\right)$$

$$|AP| = \sqrt{x^2 - r^2}$$

$$\vec{l} = \frac{\vec{AP}}{|AP|} = \left(-\frac{\sqrt{x^2 - r^2}}{x}, \frac{r}{x}\right)$$

$$E = A + |AP|\vec{l}$$

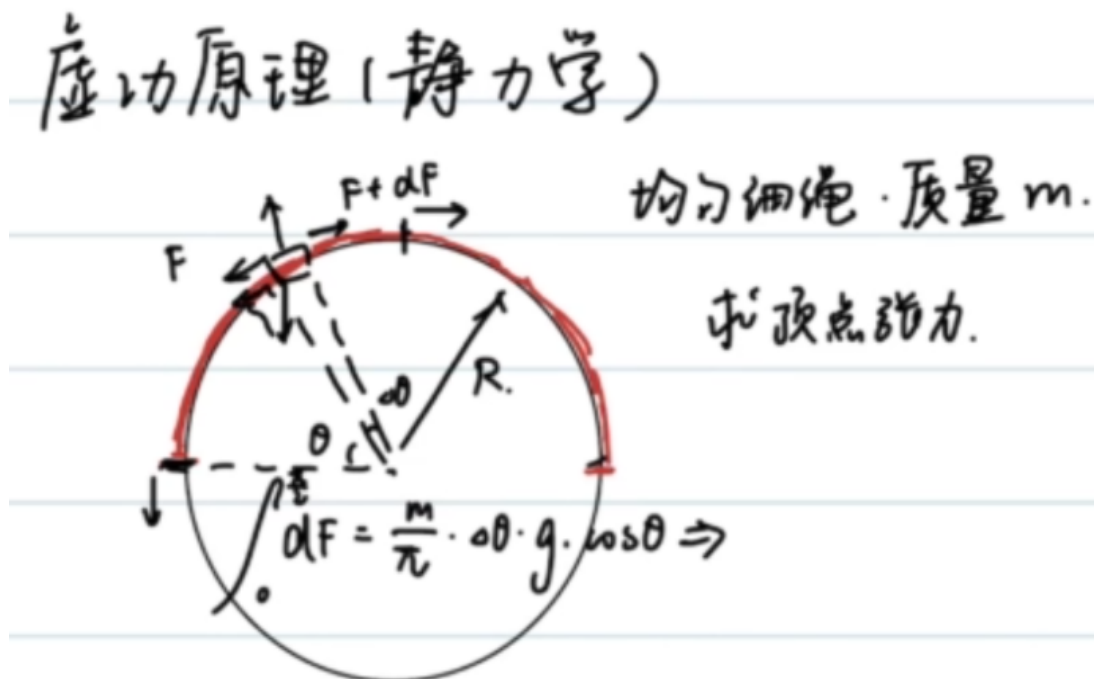
$$E'(t) = A' + |AP|\vec{l}'$$

$$= (v, 0) + \sqrt{x^2 - r^2} \left(-v \frac{2r^2}{x^3} \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{r^2}{x^2}}}, -v \frac{r}{x^2}\right)$$

$$= \left(v\left(1 - \frac{r^2}{x^2}\right), -v \frac{r}{x^2} \sqrt{x^2 - r^2}\right)$$

例7(虚功原理)

有一个圆上, 其半圆部分放有均匀细绳, 质量为 m , 求顶点处的张力。



对无数微小质元受力分析, 考虑沿切线方向受力平衡:

$$dF = \frac{d\theta}{\pi} mg \cos \theta$$

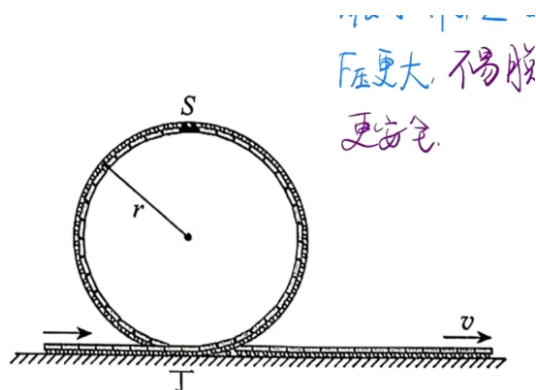
$$\int_0^F = \frac{mg}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{mg}{\pi}$$

当然, 我们有一个技巧性强的做法: **虚功原理**.

缓慢把绳拉动 Δx , $F \Delta x = \frac{\Delta x}{\pi R} mg R$, 则 $F = \frac{mg}{\pi}$

(2) 实际的过山车 并不能视为质点。如图丁所示, 一列长为 L 、质量为 M 的玩具过山车, 在无动力情况下, 从水平轨道冲上半径为 r 的竖直圆轨道。已知 $L > 2\pi r$, 不计过山车自身高度及相邻车体间碰撞。在车体始终布满轨道的一段时间内, 过山车的速率保持不变, 请在该段时间内分析下列问题:



a. 推导最高点处车体之间的拉力大小 $T = \frac{2r}{L} Mg$;

使用虚功原理,可以较容易地解决2026朝阳高三二模T19(2)

例8(必错题)

地面上有一根匀质细绳,长 l ,线密度 λ ,竖直向上的恒力 F_0 拉绳一端,当绳恰好离开地面时的速度 v_t

必错题.

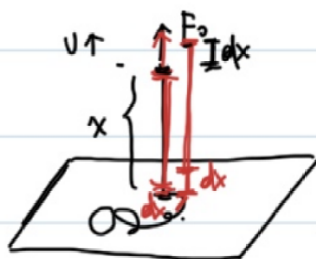
地面上有一根匀质细绳,长 l ,线密度 λ .

恒力 F_0 拉绳一端,当绳恰好离开地面时速度?



$$\text{X} \quad F_0 \cdot l = (\lambda l) \cdot g \cdot \frac{1}{2} l + \frac{1}{2} \cdot (\lambda l) \cdot v_t^2$$

绳子伸直



当绳端离地面 x 时.

若速度为 v , $\vec{v} = \frac{dx}{dt}$.

再向上提升 Δx 时.

$$F = F_0 - x \cdot \lambda \cdot g$$

$$\frac{1}{2} l \lambda g l + \frac{1}{2} l \lambda v_t^2 = F_0 l$$

$$v_t = \sqrt{2F_0/\lambda - gl}$$

很不幸,这是一个**标准错误**。一根无张力绳拉直需要额外做功,此方法求出的 v_t 偏大。

当绳端离地面 x 时,若速度为 v , $\vec{v} = \frac{dx}{dt}$,再向上提升 Δx 时:

动量定理: $F dt = (x\lambda) dv + (dx\lambda)(v + dv)$

约去二阶小量:

$$F = \lambda x dv + \lambda v dx = \lambda \frac{d(vx)}{dt}$$

$$F dt = \lambda d(vx)$$

但是时间是不知道的,如果利用 $dx = v dt$,就可以解决此问题:

$$F x dx = \lambda v x (x dv + v dx) = \lambda (vx) d(vx)$$

注意这里的 F 均为合外力, $F = F_0 - x\lambda g$

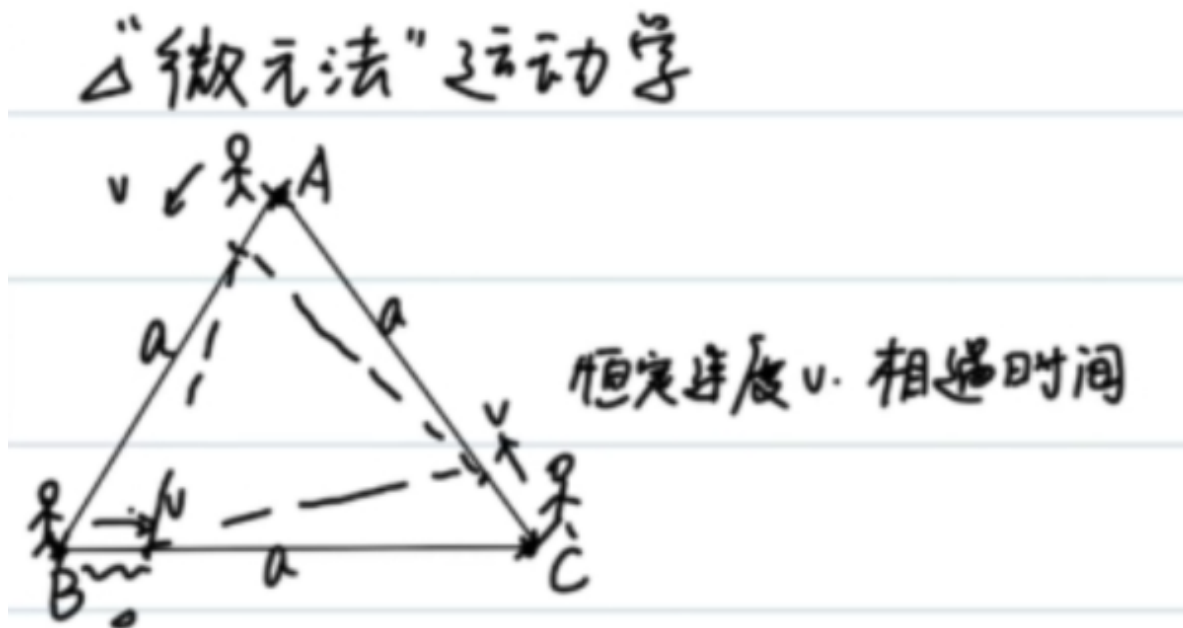
$$\int_0^l (F_0 - x\lambda g) x dx = \int_0^{lv_t} \lambda(vx) d(vx)$$

$$\frac{1}{2}F_0 l^2 - \frac{1}{3}\lambda g l^3 = \lambda \frac{1}{2}(v_t l)^2$$

$$\frac{1}{2}F_0 - \frac{1}{3}\lambda g l = \lambda \frac{1}{2}(v_t)^2$$

解得 $v_t = \sqrt{F_0/\lambda - \frac{2}{3}gl}$

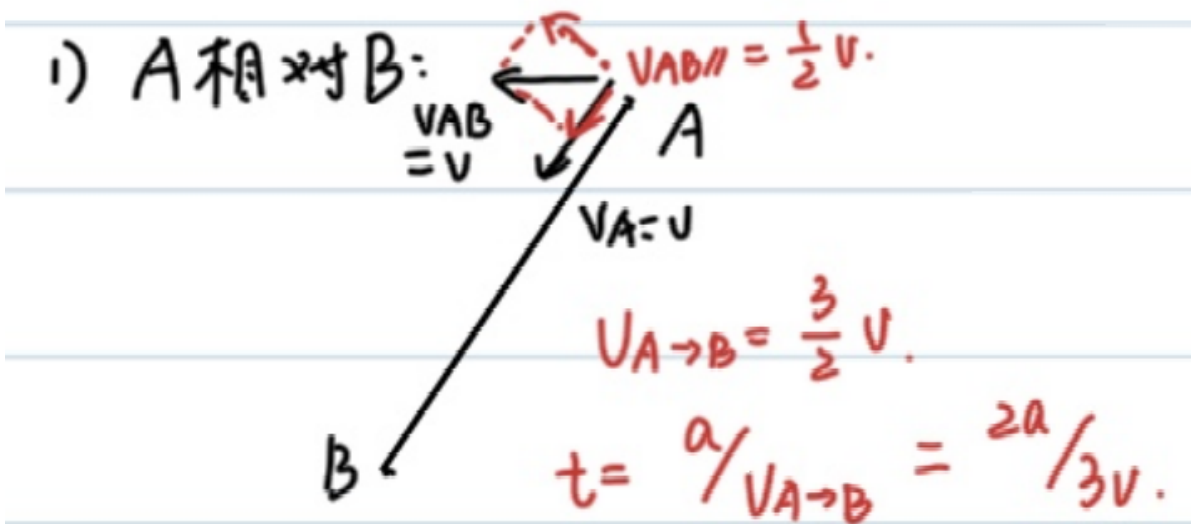
例9("微元法"运动学)



考虑对称性, 显然三人组成的图形始终是正三角形:

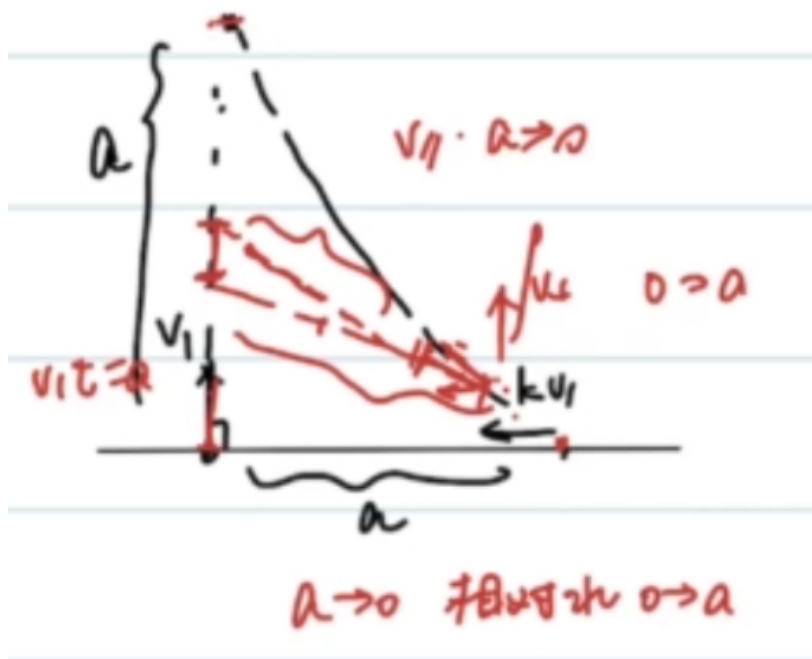
沿连线方向分解速度, 可得到:

$$da = -\frac{3}{2}v dt$$



$$a = \frac{3}{2} vt$$

解得 $t = \frac{2a}{3v}$



追击问题

设 kv 与竖直方向的夹角为 θ

$$\begin{aligned}
 vt_0 &= a \\
 \int_0^{t_0} kv \cos \theta dt &= a \\
 \int_0^{t_0} kv \sin \theta dt &= a \\
 dl &= (-kvdt + vdt \cos \theta) \\
 \int_a^0 dl &= \int_0^{t_0} (-kvdt + vdt \cos \theta) \\
 -a &= -kvt_0 + \frac{a}{k} = -ka + \frac{a}{k} \\
 k^2 - k - 1 &= 0 \\
 k &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}
 \end{aligned}$$

转动惯量

杆, 板……等刚体(质点间距离不变)-质点系运动, 都可以分解为**质心平动+绕质心转动**

日地系统可以看作绕质心的"双星转动", 而又可以认为二者的质心绕着银河系中心平动(对于多个质点, 才有转动的说法).

日/地运动可以看作日地系统绕银河中心平动+日地绕质心的转动.

由此, 力对于质心, 会产生平动; 力的力矩, 会导致转动。

质点系牛顿第二定律

$$(\sum m)a_c = \sum F$$

科尼希(质心运动)定理

$$\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M v^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_{ic}^2$$

通过 a_c , 不难求得 v_c ; 我们现在希望能通过合外力的力矩, 求得所有质点绕质心旋转的角速度 ω .

力矩 $M = Fr$, 角加速度 $\beta = \frac{d\omega}{dt}$.

定义: $M = I\beta$, 其中 I 为转动惯量.

$$I = \sum m_i r_i^2$$

计算式如上, 其中 r_i 为质点 i 到质心的距离.

例10

计算均匀杆绕中心的转动惯量

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{l} m x^2 \\ &= \frac{1}{12} m l^2 \end{aligned}$$

例11

计算均匀杆绕一端的转动惯量

$$I = \int_0^l \frac{dx}{l} m x^2 = \frac{1}{3} m l^2$$

转动惯量平行轴定理

刚体对**任意转轴**的转动惯量, 等于其对**平行质心轴**的转动惯量与刚体总质量和两轴垂直距离平方的乘积之和。

$$I = I_c + M d^2$$

对于例11, $I = I_c + m(\frac{1}{2}l)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$

例12

求均匀圆板绕过中心且垂直圆板的轴的转动惯量

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R \frac{2\pi r dr}{\pi R^2} m r^2 \\ &= \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 \\ &= \frac{1}{2} m R^2 \end{aligned}$$

类比

力	力矩
m	$I = \sum m_i r_i^2$
v	ω
a	β
$F = ma$	$M = I\beta$
$E = \frac{1}{2}mv^2$	$E = \frac{1}{2}I\omega^2$

展望(Prospect)

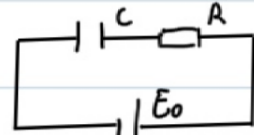
电学 很多微积分

电路 { 电容 $U = \frac{Q}{C}$ $I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow dU = \frac{I dt}{C}$ $I = C \frac{dU}{dt}$

电感 $\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$

暂态过程. 振荡电路...

充电

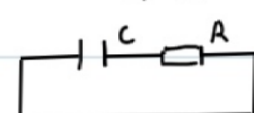


电路 $E_0 - U = IR$

$\Rightarrow E_0 - U = RC \frac{dU}{dt}$

$U(t) = E_0 (1 - e^{-t/RC})$

放电



电路 $U = IR$

$\Rightarrow U = RC \frac{dU}{dt}$ $U(t) = U_0 e^{-t/RC}$

总结

本文以一系列例题为线索，展示了微积分如何成为解决物理问题的统一语言。

- **微分方程与机械能守恒（例1、例2）**：从能量守恒出发列出 $\frac{dh}{dt}$ 或 $\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$ 的微分方程，再通过分离变量或试探解求解。简谐运动中我们由 $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ 反推出 $\omega = \sqrt{k/m}$ ，并结合机械能守恒导出弹性势能 $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ ，同时建立了简谐运动与匀速圆周运动、 v - x 椭圆图之间的对应关系。
- **简谐运动的对称性（例3）**：在含摩擦的振动问题中，用能量守恒配合“合成弹力与摩擦力、利用对称性”的技巧，得到初始振幅的取值范围 $A_0 \in (\frac{2\mu mg}{k}, \frac{3\mu mg}{k})$ 。

- **曲率半径（例4-例6）**：把曲线运动视为瞬时圆周运动，借助 $\rho = \frac{v^2}{a_n}$ 与 $a_n = \frac{|\vec{a} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$ 求抛物线、椭圆端点的曲率半径；并通过恰当的参数化（如极坐标换元）避开速度分量发散的陷阱。
- **虚功原理与变质量问题（例7、例8）**：虚功原理能极快地求出半圆绳顶点张力 $F = \frac{mg}{\pi}$ ；而对“离地绳”一类变质量问题，必须用动量定理 $F dx = \lambda (vx) d(vx)$ 处理“拉直无张力绳的额外做功”，否则会落入能量守恒给出的标准错误，正确结果为 $v_t = \sqrt{F_0/\lambda - \frac{2}{3}gl}$ 。
- **微元法运动学（例9）**：利用对称性与沿连线方向的速度分解处理追及问题，化复杂轨迹为简单的微元关系。
- **转动惯量（例10-例12）**：将刚体运动分解为“质心平动 + 绕质心转动”，由质点系牛顿第二定律、科尼希定理引出转动惯量 $I = \sum m_i r_i^2$ ，计算了杆、圆板的转动惯量，并用平行轴定理 $I = I_c + Md^2$ 加以验证，最后给出平动量与转动量的类比表。

贯穿全文的核心思想是：**先选取合适的物理守恒量或动力学方程，再通过微分建模、积分求解或微元分析将其转化为可计算的数学问题。**微积分不仅是计算工具，更提供了理解力学结构的视角。