

微积分基础导论:微积分应用1

本文介绍微积分在物理中的应用，涵盖质心计算（圆锥、半球壳、半球体）、保守力势能与平衡稳定性判据、泰勒小量展开及其在电偶极子受力、相对论动能还原、非均匀浮力等经典问题中的应用。

2026年5月24日 · 物理竞赛 · 微积分

朝花夕拾

微积分Ⅲ

$$\int_{x_0}^{x_1} \underbrace{f(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{被积函数}}} \cdot \underbrace{dx}_{\substack{\uparrow \\ \text{积分变量}}} \stackrel{\text{猜}}{=} F(x) \Big|_{x_0}^{x_1} = F(x_1) - F(x_0).$$

做小课题: www.Wolframalpha.com

例1

有一个质量均匀的圆锥，其母线与高的夹角为 θ ，底面半径为 r ,密度为 ρ .

- (1)求总质量
- (2)求重心位置

设原点为锥顶，圆锥的高为x轴

- (1)

$$\begin{aligned}
 dm &= \rho S dh \\
 &= \pi \rho (h \tan \theta)^2 dh \\
 m &= \int dm \\
 &= \pi \rho \tan^2 \theta \int_0^{r \cot \theta} h^2 dh \\
 &= \pi \rho \tan^2 \theta \left(\frac{1}{3} h^3 \right) \Big|_0^{r \cot \theta} \\
 &= \frac{1}{3} \pi \rho r^3 \cot \theta
 \end{aligned}$$

(2)

由对称性知，重心在圆锥的高上.

$$\begin{aligned}
 x_c &= \frac{\int m_i x_i}{m} \\
 &= \frac{\int_0^{r \cot \theta} \pi \rho \tan^2 \theta x^3 dx}{m} \\
 &= \frac{\pi \rho \tan^2 \theta \int_0^{r \cot \theta} x^3 dx}{\frac{1}{3} \pi \rho r^3 \cot \theta} \\
 &= 3 \frac{\tan^3 \theta}{r^3} \frac{(r \cot \theta)^4}{4} \\
 &= \frac{3}{4} r \cot \theta
 \end{aligned}$$

例3

求均匀半球壳的重心位置

以球心为原点，垂直截面方向为x轴

不妨设单位面积质量为1.

仿照求n维球的体积，我们考虑在 $\theta, d\theta$ 处各切一刀。

与半球壳的本质区别

	n维球体积	半球壳面积
切片方式	水平薄片，厚度 $\ dy\ = R \sin \theta d\theta$	球面环形，弧长 $dl = R d\theta$
$R \sin \theta d\theta$	正确（竖直厚度）	错误（应为弧长）

$$\begin{aligned}
 dm &= (2\pi R \sin \theta) R d\theta \\
 x_c &= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos \theta dm}{2\pi R^2} \\
 &= \frac{2\pi R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta}{2\pi R^2} \\
 &= \frac{2\pi R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d \sin \theta}{2\pi R^2} \\
 &= \frac{2\pi R^3 \int_0^1 u du}{2\pi R^2} \\
 &= \frac{2\pi R^3 \times \frac{1}{2}}{2\pi R^2} \\
 &= \frac{1}{2} R
 \end{aligned}$$

例4

求均匀半球体的重心位置

以球心为原点，垂直截面方向为x轴

不妨设单位体积质量为1.

我们平行截面横切：

法一

$$\begin{aligned}
 dm &= \pi (R \sin \theta)^2 \sin \theta R d\theta \\
 x_c &= \frac{\int R \cos \theta dm}{\frac{2}{3} \pi R^3} \\
 &= \frac{\pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta}{\frac{2}{3} \pi R^3} \\
 &= \frac{3}{2} R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d \sin \theta \\
 &= \frac{3}{2} R \int_0^1 u^3 du \\
 &= \frac{3}{8} R
 \end{aligned}$$

法二

$$\begin{aligned}
 dm &= \pi(R^2 - x^2)dx \\
 x_c &= \frac{\int dm x}{\frac{2}{3}\pi R^3} \\
 &= \frac{\pi \int_0^R (R^2 - x^2)x dx}{\frac{2}{3}\pi R^3} \\
 &= \frac{\pi \left(\frac{R^2}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^R}{\frac{2}{3}\pi R^3} \\
 &= \frac{3}{8}R
 \end{aligned}$$

平衡的稳定性

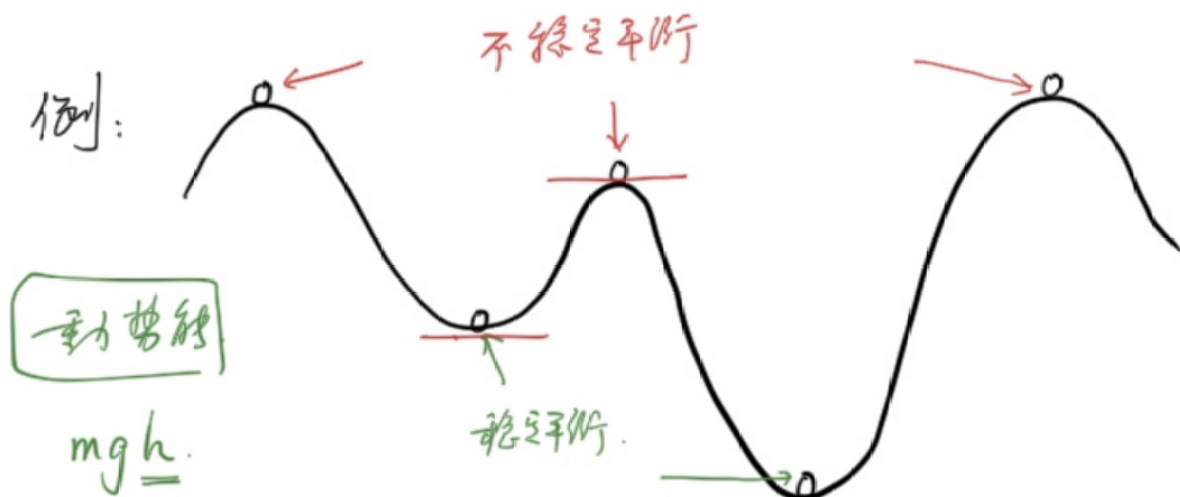
在保守力下，若势能处于极值时，则平衡：

- 势能处在极大值：不稳定平衡
- 势能处在极小值：稳定平衡

说文解字：保守力做功与路径无关，只与初末位置相关

重力，引力，静电力都是保守力

摩擦力是典型的非保守力



导数极值第二充分条件

定理内容

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0) = 0$ （即 x_0 为驻点）：

1. 若 $f''(x_0) < 0$ ，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得**极大值**。
2. 若 $f''(x_0) > 0$ ，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得**极小值**。
3. 若 $f''(x_0) = 0$ ，则该定理**失效**，无法判定是否取得极值（需使用第一充分条件或更高阶导数判断）。

应用示例

求函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 的极值。

解：首先求一阶导数：

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

令 $f'(x) = 0$ ，解得驻点为：

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

再求二阶导数：

$$f''(x) = 6x$$

将驻点代入二阶导数进行判断：

- 对于 $x_1 = 1$ ：

$$f''(1) = 6 > 0$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得**极小值**，极小值为 $f(1) = -2$ 。

- 对于 $x_2 = -1$ ：

$$f''(-1) = -6 < 0$$

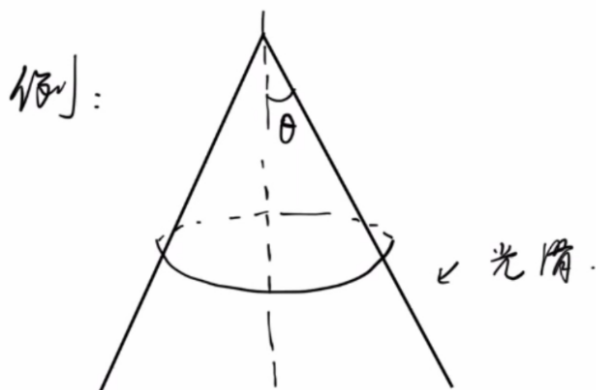
所以 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取得**极大值**，极大值为 $f(-1) = 2$ 。

例5

有一个质量为 m ,劲度系数为 k ,原长为 $2\pi r_0$ 的橡皮筋,位于母线与高线夹角为 θ 的圆锥上.

(1)求平衡位置

(2)求上下扰动稳定性



橡皮筋. m, k ,
原长 $2\pi r_0$.
1) 求平衡位置.
2) 求上下扰动稳定性.

(1)

设平衡位置到锥顶的高度差为 z ,平衡时橡皮筋伸长量为 x

$$\begin{aligned} x &= 2\pi(z \tan \theta - r_0) \\ E_p &= \frac{1}{2}kx^2 - mgz \\ &= 2\pi^2k(z \tan \theta - r_0)^2 - mgz \\ &= 2\pi^2k \tan^2 \theta z^2 - (mg + 4\pi^2kr_0 \tan \theta)z + 2\pi^2kr_0^2 \\ z_0 &= \frac{mg + 4\pi^2kr_0 \tan \theta}{4\pi^2k \tan^2 \theta} \end{aligned}$$

(2)

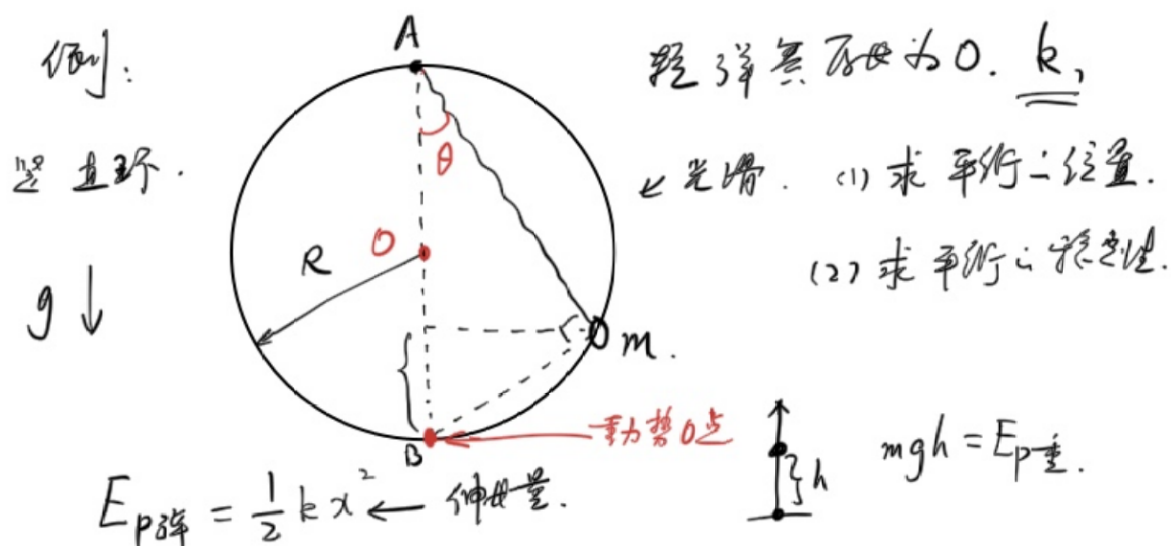
$E_p(z)$ 在 $z = z_0$ 处取得极小值,故平衡为稳定平衡.

例6

光滑圆环半径为 R ,弹簧一端挂在圆环正上方,另一端拴着质量为 m 的小球.圆环穿过小球.弹簧原长为0,劲度系数为 k

(1)求平衡位置

(2)求平衡的稳定性.



(1)

设弹簧与竖直方向夹角为 θ

$$\begin{aligned}
 E_p &= \frac{1}{2} k (2R \cos \theta)^2 + mg(2R \sin^2 \theta) \\
 &= 2kR^2 \cos^2 \theta + 2mgR(1 - \cos^2 \theta) \\
 &= 2R(kR - mg) \cos^2 \theta + 2mgR \\
 \frac{dE_p}{d\theta} &= 4R(mg - kR) \cos \theta \sin \theta = 0 \\
 &\rightarrow \sin 2\theta = 0 \\
 &\theta = 0 \text{ or } \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

平衡位置为A点, B点

(2)

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = 4R(mg - kR) \cos 2\theta$$

若 $mg < kR$, 则 $\theta = 0$ 时, $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} < 0$

为势能极大值点, B点属于不稳定平衡.

 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} > 0$

为势能极小值点, A点属于稳定平衡

 $mg > kR$, 情况恰相反

小量展开

例7

$$f(x) = \sqrt{x}, \text{估算 } f(4.01)$$

泰勒展开

鸭子原则：有一个长得像鸭子的东西，听声音也很像鸭子，吃肉也是鸭子味，那这就是一只鸭子

不断地获得更多的信息，即可逼近真相

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + f'(x_0)x + \frac{f''(x)}{2!}x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}x^3 + \dots$$

例8

$f(x) = x^\alpha$ 在1附近的展开:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha x^{\alpha-1}, f'(1) = \alpha \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, f''(1) = \alpha(\alpha-1) \\ &\dots \\ f(1+x) &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots \\ &\text{其中, } |x| < 1 \end{aligned}$$

同理得到其他常见泰勒展开

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \dots \\ \cos \theta &= 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 \\ e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \\ \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots \end{aligned}$$

例9

证明: $1 + e^{i\pi} = 0$ 或 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, 其中 i 为虚数单位.

把 $i\theta$ 带入 e^x 泰勒展开易证.

例10

例题：电偶极子的受力

已知条件

库仑定律：

$$F = \frac{kQq}{r^2}$$

- 若 Q 、 q 同号，则 $F > 0$ ，为斥力
- 若 Q 、 q 异号，则 $F < 0$ ，为引力

题目

电偶极子由一对等量异种电荷 $+q$ 与 $-q$ 组成，两者间距为 l 。

求：

(1) 电偶极子轴线延长线上，距偶极子中心距离为 r 处的点电荷 Q 所受的力。

条件： $r \gg l$ ，保留到最低阶小量。

(2) 电偶极子轴线与连线成 θ 角、距偶极子中心距离为 r 处的点电荷 Q 所受的力（分解为径向分量 F_r 和切向分量 F_θ ）。

条件： $r \gg l$ ，保留到最低阶小量。

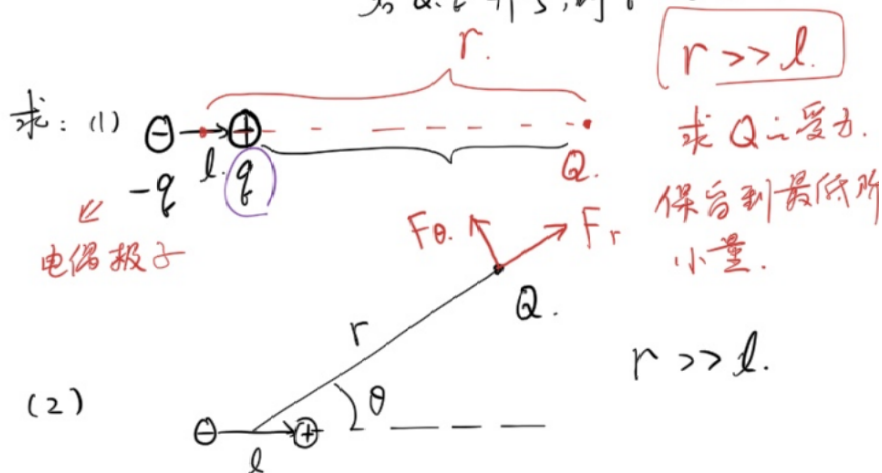
例. 已知库仑定律:

$$\vec{Q} \xrightarrow{r} \vec{q}$$

$$\Rightarrow F = \frac{kQq}{r^2}$$

若 Q, q 同号则 $F > 0$ 为斥力.

若 Q, q 异号, 则 $F < 0$ 为引力.

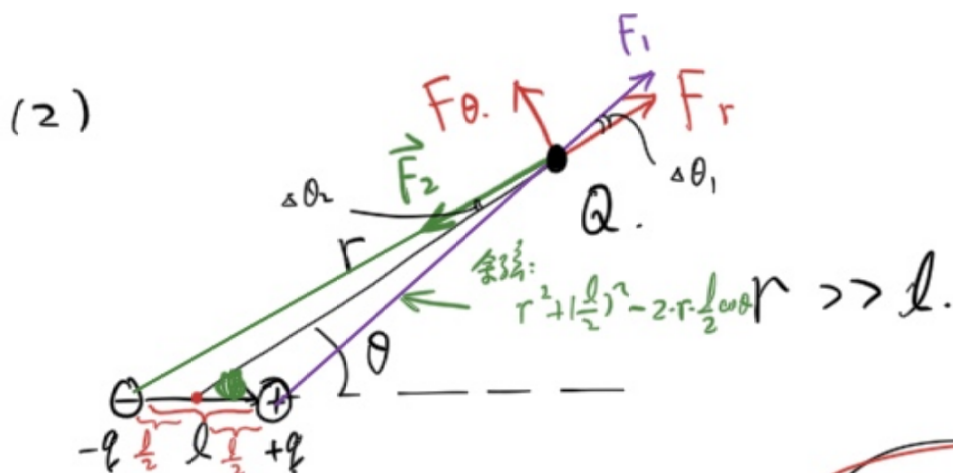


(1)

$$\begin{aligned} F &= \frac{kQq}{(r - \frac{l}{2})^2} + \frac{kQ(-q)}{(r + \frac{l}{2})^2} \\ &= \frac{kQq}{r^2} \left[\left(1 - \frac{l}{2r}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{l}{2r}\right)^{-2} \right] \\ &\approx \frac{kQq}{r^2} \frac{2l}{r} \\ &= \frac{2kQql}{r^3} \end{aligned}$$

其中 $p = ql$, 称为偶极矩

(2)



先预估. 小量阶数.

1阶小量

$$\begin{aligned}
 F_r &= F_1 \cos \Delta\theta_1 - F_2 \cos \Delta\theta_2 \\
 &= F_1(1 - \frac{1}{2}\Delta\theta_1^2) - F_2(1 - \frac{1}{2}\Delta\theta_2^2) \\
 &\quad \underline{\underline{\text{忽略二阶小量}}} F_1 - F_2 \\
 &= \frac{kQq}{r^2 + (\frac{l}{2})^2 - 2r\frac{l}{2}\cos\theta} - \frac{kQq}{r^2 + (\frac{l}{2})^2 + 2r\frac{l}{2}\cos\theta} \\
 &= \frac{kQq}{r^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{l}{r}\cos\theta + \frac{l^2}{4r^2}} - \frac{1}{1 + \frac{l}{r}\cos\theta + \frac{l^2}{4r^2}} \right) \\
 &\quad \underline{\underline{\text{泰勒展开}}} \frac{kQq}{r^2} \left(\frac{2l\cos\theta}{r} \right) \\
 &= \frac{2kQql\cos\theta}{r^3}
 \end{aligned}$$

$$F_\theta = \frac{kQql\sin\theta}{r^3}$$

例11

在相对论中，物体的总能量 $E = mc^2$

其中 m 为**动质量**: $m = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m_0$

其中 v 为物体速度， c 为光速， m_0 为**静质量**

称 $E_0 = m_0 c^2$ 为静能量，有

$$E_k = E - E_0$$

而根据经典物理 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

证明：在 $v \ll c$ 时，相对论中的 E_k 还原为经典物理学中的动能

$$\begin{aligned}
 E_k &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m_0 c^2 - m_0 c^2 \\
 &= m_0 c^2 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] \\
 &\quad \underline{\underline{\text{保留一阶小量}}} \frac{1}{2} m_0 v^2
 \end{aligned}$$

例12

有一杯糖水，其密度 $\rho(x)$ 与深度相关, $\rho(x) = \rho_0 e^{\frac{x}{l_0}}$

有一个密度为 $\rho_1 = 1.5\rho_0$ 的均匀硬棒，截面积为 S ，长度为 l_0

求平衡时，顶端到水面的距离(在水面上还是水面下?).

$$m_0 = \rho_1 S l_0 = 1.5 \rho_0 S l_0$$

假设上端在水面上,浸入水中的长度 $x_0 < l_0$

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{x_0} \rho(x) g S dx \\ &= \rho_0 g S \int_0^{x_0} e^{\frac{x}{l_0}} dx \\ &= \rho_0 g S l_0 (e^{\frac{x_0}{l_0}} - 1) \end{aligned}$$

要求 $F = m_0 g = \rho_1 S l_0 = 1.5 \rho_0 g S l_0$

即 $e^{\frac{x_0}{l_0}} = 2.5, x_0 < l_0$ ，假设成立

Sonnet 4.6总结

总结

本节围绕微积分在物理建模中的核心应用，串联了以下几条主线：

质心计算：通过微元积分，分别求解了均匀圆锥 ($\frac{3}{4}r \cot \theta$)、半球壳 ($\frac{1}{2}R$) 和半球体 ($\frac{3}{8}R$) 的重心位置，体会切片方式的选取对积分的影响。

平衡与稳定性：引入势能极值判据——势能极小对应稳定平衡，势能极大对应不稳定平衡。通过圆锥上的橡皮筋和圆环弹簧小球两个模型，将该判据具体化为对 E_p 二阶导数的符号分析。

泰勒展开与小量近似：掌握 $(1+x)^\alpha$ 、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 e^x 、 $\ln(1+x)$ 等常见展开式，并应用于：

- 电偶极子受力（引出偶极矩 $p = ql$ ）
- 相对论动能在 $v \ll c$ 下还原为 $\frac{1}{2}m_0 v^2$
- 非均匀密度糖水中硬棒的浮力平衡

核心思想：复杂问题的关键往往在于选取合适的微元与坐标系，再结合小量展开保留主要项，从而将繁琐的精确计算化为简洁的近似结果。