

微积分基础导论:简易积分

从质量积分出发，系统介绍不定积分与定积分的概念、常用公式及换元法，并通过重心计算、n维球体积推导、阻力运动等物理例题，展示积分在竞赛物理中的实际应用。

2026年5月22日 · 物理竞赛 · 微积分

引入

假如知道一头猪各个微小部分的密度 ρ ,怎么求总质量?

$$M = \sum \Delta m_i = \int dm = \int \rho(\vec{r})dV$$

由此,便引入了**不定积分**记号

例1

一根一维细棒,其单位长度的线密度 $\rho(x) = Ax^4$,求总质量:

$$M = \int_0^{l_0} \rho(x)dx$$

由此,又引入了**定积分**记号.

其中:

被积函数	积分变量	积分符号	上,下限
$\rho(x)$	x	$\int$	$l_0, 0$

运算

求**不定积分**,即求**原函数**

定义:若 $F'(x) = f(x)$,则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的**原函数**.

容易知道,**原函数**是不唯一的,其常数项是任意的.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

例2

通过观察,求下列函数的不定积分.

(1) $\int 5x^3 dx$

$$= \frac{5}{4}x^4 + C$$

(2) $\int \sin 3x dx$

$$= -\frac{1}{3} \cos 3x + C$$

(3) $\int \frac{4}{x} dx$

$$= 4 \ln x + C$$

(4) $\int 7 \cos 2x dx$

$$= \frac{7}{2} \sin 2x$$

以下为常用的不定积分表:

```

\begin{gathered} % 高中物理竞赛常用积分表 % ===== 基本积分 ===== \int x^n dx = \\ \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad \int \ln x dx = x \ln x - x + C \quad \% ===== 三角 \\ 函数 ===== \int \sin x dx = -\cos x + C \quad \int \cos x dx = \sin x + C \quad \int \tan x dx = -\ln \\ |\cos x| + C \quad \int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C \quad \int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \\ \frac{\sin 2x}{4} + C \quad \int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + C \quad \int \cos(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a} \\ + C \quad \% ===== 有理/根式 ===== \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \\ + C \quad \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \quad \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad \% \\ ===== 高频定积分 ===== \int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a} \quad \int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi \quad \% ===== 分部积分 ===== \\ \int u dv = uv - \int v du \quad \int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \left( x - \frac{1}{a} \right) + C \\ \int x \sin(ax) dx = -\frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cos(ax)}{a} + C \quad \int x \cos(ax) dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \sin(ax)}{a} + C \\ \int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin bx - b \cos bx) \\ \int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C \\ \end{gathered}

```

说明

为什么**求积分**就是**求原函数**的过程?

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \sum_{x_0}^{x_1} f(x) \Delta x = \sum \Delta S$$

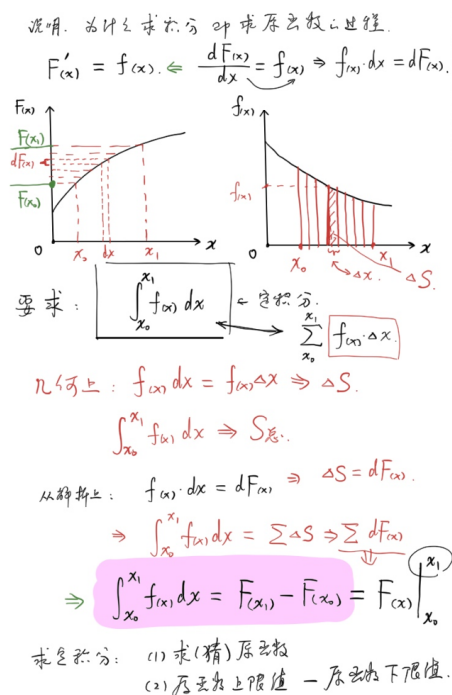
而 $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, 即 $dF(x) = f(x) dx$, 故:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = S = \sum dF(x) = F(x_1) - F(x_0)$$

记作:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = F(x) \Big|_{x_0}^{x_1}$$

不难看出,如果定积分上下限交换,则结果变为相反数.



例3

$$(1) \int_0^{-1} (a + bx^2) dx$$

$$\text{原函数 } F(x) = ax + \frac{b}{3}x^3 + C$$

$$\int_0^{-1} (a + bx^2) dx = F(-1) - F(0) = -a - \frac{b}{3}$$

$$(2) \int_a^b \sin(kt + \phi_0) dt$$

$$\text{原函数 } F(x) = -\frac{1}{k} \cos(kt + \phi_0) + C$$

$$\int_a^b \sin(kt + \phi_0) dt = F(b) - F(a) = \dots$$

$$(3) \int_a^{2a} \frac{1}{(x+a)^2} dx$$

$$\text{原函数 } F(x) = -(x+a)^{-1} + C$$

$$\int_a^{2a} \frac{1}{(x+a)^2} dx = F(2a) - F(a) = \frac{1}{6a}$$

$$(4) \int_1^5 \frac{dx}{x^2 + 7x + 12}$$

把被积函数写成部分分式:

$$\frac{1}{x^2 + 7x + 12} = \frac{1}{x + 3} + \frac{1}{x + 4}$$

原函数 $F(x) = \ln(x + 3) - \ln(x + 4) + C$

$$\int_1^5 \frac{dx}{x^2 + 7x + 12} = F(5) - F(1) = \ln 8 - \ln 9 - \ln 4 + \ln 5 = \ln 2 - 2 \ln 3 + \ln 5$$

$$(5) \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

使用第二类换元法:

$$\text{令 } x = \cos \theta, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{则 } \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin \theta d(\cos \theta) = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 \theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos 2\theta - 1}{2}$$

$$\text{原函数 } F(x) = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{x}{2} + C$$

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = F(0) - F(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$$

换元法: 换掉 x , dx 和积分上下限.

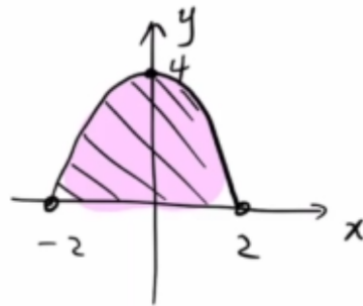
例4

例: 有一块均匀硬纸板.

$$y = -x^2 + 4.$$

(1) 求总面积.

(2) 求重心的位置 (x_c, y_c) .



有一块均匀硬纸板, 其形状为 $y = -x^2 + 4$ 与 x 轴所围成的图形

(1) 求总面积

(2) 求重心 (x_c, y_c) 的面积

Note: 积分式中, $\int f(x) dx$ 中的 dx 天然存在

(1) 竖着切

$$dS = (4 - x^2)dx$$

$$S = \int dS = \int_{-2}^{+2} (4 - x^2)dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right) \Big|_{-2}^{+2} = \frac{32}{3}$$

(2)横着切

由于图形左右对称, 则 $x_c = 0$, 又由重心定义:

$$y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$$

$$= \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i}$$

$$= \frac{\int_0^{+4} 2y\sqrt{4-y}dy}{\frac{32}{3}}$$

法一

重点是计算 $\int_0^4 y\sqrt{4-y}dy$

利用三角换元化简代数关系:

令 $y = 4\sin^2 \theta, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $dy = 8\sin \theta \cos \theta d\theta$

$$\int_0^4 y\sqrt{4-y}dy$$

$$= 64 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos^2 \theta d\theta$$

$$= -64 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\cos \theta$$

$$= 64 \int_0^1 (1-u^2)u^2 du$$

$$= 64 \left(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{128}{15}$$

$$y_c = \frac{2\frac{128}{15}}{\frac{32}{3}} = \frac{8}{5}$$

法二

$$y_c = \frac{\int 2xydy}{S}$$

由于 $y = 4 - x^2$, $dy = -2xdx$, $x \in [0, 2]$, 故:

注意, 积分换元不能改变原变量的范围, 并且新变量应该与原变量一一对应.

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{\int_{+2}^0 4x^2(4 - x^2)dx}{S} \\ &= \frac{\left(\frac{4}{5}x^5 - \frac{16}{3}x^3\right)\big|_{+2}^0}{S} \\ &= \frac{8}{5} \end{aligned}$$

例5

求n维球的表"面积"和"体积"

我们定义, 球是所有到O点的距离小于等于R的点构成的集合.

不难看出, 一维的球为一条线段;二维的球为一个圆饼;三维的球就是常规意义的球

接下来, 我们定义这些球的面积与体积:

n维球的体积 V_n , 即**占有的空间与单位空间的比值**

由常识不难得出:

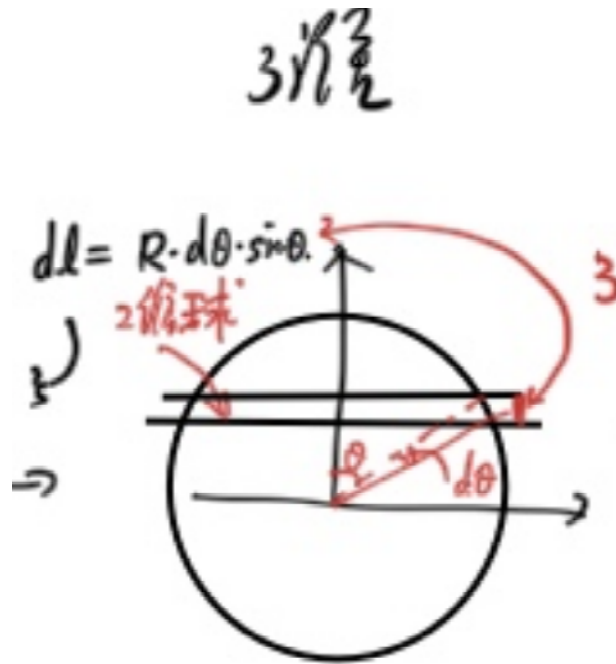
$$V_1(R) = 2R, V_2(R) = \pi R^2, V_3(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

但研究4,5维球时, 我们的常识就失去了作用.

为了解决更高维的问题, 我们诉诸于对低维度球的重新思考:

从一维球到二维球

对于二维球, 在 $\theta, \theta + d\theta$ 处各切一刀



$$\begin{aligned}
 dV_2 &= V_1(R \sin \theta) dl \\
 &= 2R \sin \theta (R \sin \theta d\theta) \\
 V_2 &= \int dV_2 = \int_0^\pi 2R^2 \sin^2 \theta d\theta \\
 &= R^2 \int_0^\pi (1 - \cos 2\theta) d\theta \\
 &= R^2 \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_0^\pi \\
 &= \pi R^2
 \end{aligned}$$

从二维球到三维球

继续计算三维球的体积:

类似的, 在 $\theta, \theta + d\theta$ 处各切一刀

$$\begin{aligned}
 dV_3 &= V_2(R \sin \theta) dl \\
 &= \pi R^2 \sin^2 \theta (R \sin \theta d\theta) \\
 &= \pi R^3 \sin^3 \theta d\theta \\
 V_3 &= \int dV_3 \\
 &= \int_0^\pi \pi R^3 \sin^3 \theta d\theta \\
 &= -\pi R^3 \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta \\
 &= \pi R^3 \int_{-1}^{+1} (1 - u^2) du \\
 &= \pi R^3 \left(u - \frac{1}{3} u^3 \right) \Big|_{-1}^1 \\
 &= \frac{4}{3} \pi R^3
 \end{aligned}$$

对于三角函数积分，有如下的二级结论：

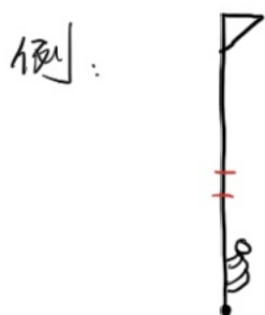
- 奇次幂：换元
- 偶次幂：倍角公式

从三维球到四维球

激动人心的时刻到了，仿照之前的解法：

$$\begin{aligned}
 dV_4 &= V_3(R \sin \theta) (R \sin \theta d\theta) \\
 &= \frac{4}{3} \pi R^4 \sin^4 \theta d\theta \\
 V_4 &= \int dV_4 \\
 &= \frac{4}{3} \pi R^4 \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta \\
 &= \frac{4}{3} \pi R^4 \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \pi R^4 \int_0^\pi (\cos^2 \theta - 2 \cos \theta + 1) d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \pi R^4 \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \cos 4\theta - 2 \cos 2\theta + \frac{3}{2} \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \pi R^4 \left(\frac{1}{8} \sin 4\theta - \sin 2\theta + \frac{3}{2} \theta \right) \Big|_0^\pi \\
 &= \frac{1}{2} \pi^2 R^4
 \end{aligned}$$

例6



杜: 往上爬的速度:

$$v = \frac{c}{a+bh} \quad \text{已知 } a, b, c.$$

求: 从 $0 \rightarrow h_0$ 要花 多长时间.

$$t = \sum \Delta t = \int dt.$$

找一小段: $h \rightarrow h+dh$ 之间 $\Rightarrow dt = \frac{dh}{v} = \frac{dh}{\frac{c}{a+bh}}$

$$\Rightarrow t = \int dt = \int_0^{h_0} \frac{a+bh}{c} \cdot dh = \left(\frac{a}{c}h + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{c} \cdot h^2 \right) \Big|_0^{h_0}.$$

↑ 初值与终值
↑ 积分变量 h .

猜: $\left(\frac{a}{c}h + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{c}h^2 \right)' = \frac{a}{c} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{c} \cdot 2h$

有一个人向旗杆上爬, 向上爬的速度为 $v = \frac{c}{a+bh}$, 其中 a, b, c 均为常量.

求这个人从高度为 0 爬到高度为 h_0 所需的时间.

$$\begin{aligned}
 dt &= \frac{dh}{v} = \frac{dh}{\frac{c}{a+bh}} \\
 t &= \int dt \\
 &= \int_0^{h_0} \frac{a+bh}{c} dh \\
 &= \left(\frac{a}{c}h + \frac{b}{2c}h^2 \right) \Big|_0^{h_0} \\
 &= \frac{a}{c}h_0 + \frac{b}{2c}h_0^2
 \end{aligned}$$

例7

一水平运动小球质量为 m , 初速度为 v_0 , 受阻力 $f = -kv$.

(1) 球停止时的位移 x

(2) 任意 t 时刻的速度 v 与位移 x

(1)

牛顿第二定律: $a = \frac{f}{m} = -\frac{k}{m}v$

即: $\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} \frac{dx}{dt}$

所以 $dv = -\frac{k}{m}dx$

$$dv = -\frac{k}{m}dx$$

(Aha)第一个微分方程出现了!

由于 x, v 一一对应, 所以对等式两边积分, 从开始到停下:

$$\begin{aligned}\int_{v_0}^0 dv &= -\frac{k}{m} \int_0^{x_0} dx \\ -v_0 &= -\frac{k}{m} x_0 \\ x_0 &= \frac{mv_0}{k}\end{aligned}$$

(2)在上一问中, 我们消去了 dt , 留下了 dv, dx .

为了求出 $v(t), x(t)$, 不能消去 dt

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -\frac{k}{m}v \\ dt &= -\frac{m}{k} \frac{1}{v} dv \\ \int_0^t dt &= -\frac{m}{k} \int_{v_0}^v \frac{1}{v} dv \\ t &= -\frac{m}{k} \ln \frac{v}{v_0} \\ v(t) &= v_0 e^{\frac{-kt}{m}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(t) &= \int_0^t v(t) dt \\ &= v_0 \int_0^t e^{\frac{-kt}{m}} dt \\ &= v_0 \left(-\frac{m}{k} e^{\frac{-kt}{m}} \right) \Big|_0^t \\ &= v_0 \left(-\frac{m}{k} e^{\frac{-kt}{m}} + \frac{m}{k} \right) \\ &= \frac{mv_0}{k} (1 - e^{\frac{-kt}{m}})\end{aligned}$$

Sonnet 4.6

核心内容

文章从物理问题出发（如求质量、位移），自然地引入不定积分与定积分的概念，再通过大量例题展示积分的实际运算方法。

主要知识点

文章涵盖：不定积分（求原函数）与定积分的定义；常用积分公式表；换元法（三角换元、代数换元）与分部积分；以及牛顿-莱布尼茨公式的几何直觉。

例题体系

例题由浅入深，从基础的多项式、三角函数积分，逐步过渡到：抛物线形硬纸板的面积与重心计算； n 维球体积的递推推导（1 维到 4 维）；物理应用（爬杆问题、阻力运动问题），其中阻力运动一题还自然引出了第一个微分方程。

风格特点

行文轻松（"一头猪"的引入）、物理直觉与数学推导并重，适合有一定高中数学基础、正在备赛物理竞赛的学生阅读。