

微积分基础导论:极限与导数

本文中涉及到的微积分服务于 物理竞赛 ,侧重于 实用性 ,而非 严谨性

2026年5月17日 · 物理竞赛 · 微积分

本文中涉及到的微积分服务于**物理竞赛**,侧重于**实用性**,而非**严谨性**

数列极限

引入

设 $a_n = 1 - 10^{-n} (n = 1, 2, 3, \dots)$

可以知道, a_n 越来越接近于1,但是当 n 无穷大时, a_n 到底是不是1呢?

由此,我们由误差的角度,引入 $\epsilon - N$ 语言:

$\epsilon - N$ 语言

如果存在一个 $p \in \mathbb{R}$ 使得:对于任意的实数 $\epsilon > 0$,都存在一个整数 N ,使得对于任意 $n > N, |a_n - p| < \epsilon$,那么称 p 为数列 a_n 的极限,记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p$.否则叫做数列 a_n 没有极限

函数极限

引入

有了级数(数列)的极限,自然引出函数的极限.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 的值等于多少?

同理,引出 $\epsilon - \delta$ 语言

$\epsilon - \delta$ 语言

如果存在一个 $p \in \mathbb{R}$ 使得:对任意 $\epsilon > 0$,若存在 $\delta > 0$,使得当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, $|f(x) - p| < \epsilon$,则称 $f(x)$ 在 x_0 处的**左极限**为 p ,记作 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = p$

同理容易得到**右极限**的定义.

此外,如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$,则称 $f(x)$ 在 x_0 处的**极限**为 p ,记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = p$

以上的 ϵ - N 语言/ ϵ - δ 语言 不是本节的重点

好用的极限判断法则

夹逼定理

若 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$,且 $f(x), h(x)$ 极限存在且相同,则 $f(x), h(x), g(x)$ 极限存在且相同.

例1

(不严谨地)感受 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

由单位圆中面积大小关系,熟知 $\sin x \leq x \leq \tan x, x \in [0, \frac{\pi}{2})$

于是,有不等式 $\cos x = \frac{\sin x}{\tan x} < \frac{\sin x}{x} < 1, x \in (0, \frac{\pi}{2})$

因为 $\cos x, 1$ 在0处的极限都是1,所以:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

极限运算法则

容易证明,四则运算的极限等于极限的四则运算:

1. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = p_1, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = p_2$,则:
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = p_1 \pm p_2$
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = p_1p_2$
2. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = p_1, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = p_2 \neq 0$,则:
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p_1}{p_2}$

例2

计算极限(不一定存在极限)

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x - 5}$$

$x - 5 \rightarrow 0$,不存在极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

由夹逼定理:

$$\frac{-1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$$

左右极限等于0,所以所求极限为0.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 + 203x}{3x^2 + 5x + 7}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 + 203x}{3x^2 + 5x + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10 + 203\frac{1}{x}}{3 + 5\frac{1}{x} + 7\frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (10 + 203\frac{1}{x})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (3 + 5\frac{1}{x} + 7\frac{1}{x^2})} = \frac{10}{3} \cdot 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) \right)^2 = \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2}$$

导数

引入

考虑函数 $f(x) = x^2$, 在 $x = 1$ 处, 函数的**瞬时变化率**是多少?

我们先考虑从 $x = 1$ 到 $x = 1 + \Delta x$ 的**平均变化率**:

$$\frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = 2 + \Delta x$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，平均变化率趋近于 2，这就是 $f(x) = x^2$ 在 $x = 1$ 处的**瞬时变化率**，即**导数**。

导数↔微商

微分,即微小变化量.微分之商,称为微商.

定义 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$

导数的定义

若极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x)$ 在 x_0 处**可导**，该极限值称为 $f(x)$ 在 x_0 处的**导数**，记作 $f'(x_0)$ 或 $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$ 。

若 $f(x)$ 在定义域上每一点都可导，则称 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的**导函数**，简称**导数**。

以上严格定义不是本节重点，重要的是会**计算导数**。

常见函数的导数

由定义出发，可以推导出以下常用结论：

函数 $f(x)$	导数 $f'(x)$
C (常数)	0
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

例：由定义推导 $(x^2)' = 2x$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

导数的四则运算法则

法则

设 $f(x), g(x)$ 均可导，则：

1. 加减法则： $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
2. 乘法法则： $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
3. 除法法则： $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ ，其中 $g(x) \neq 0$

记忆口诀：乘法法则——"前导后不导，加上前不导后导"；除法法则——"上导下减上下导，除以下的平方".

推导乘法法则

$$[f(x)g(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

加减同一项 $f(x)g(x + \Delta x)$ ：

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

例题

例1

求 $f(x) = x^3 \sin x$ 的导数.

由乘法法则：

$$f'(x) = (x^3)' \sin x + x^3 (\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$$

例2

求 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 的导数 ($x \neq 0$) .

由除法法则:

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' \cdot x - \sin x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

例3

求 $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$ 的导数.

由乘法法则:

$$f'(x) = (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)'$$

$$= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x)$$

$$= 2e^x \cos x$$

例4

求 $f(x) = \tan x$ 的导数.

将 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, 由除法法则:

$$(\tan x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\boxed{(\tan x)' = \sec^2 x}$$

导数的物理应用

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{x}}{\vec{t}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

点号为**牛顿记号**,表示对时间求导.

例1

运用导数,求角速度为 ω 的匀速圆周运动的速度与加速度的大小.

$$\begin{cases} x = R \cos \omega t, \\ y = R \sin \omega t \end{cases}$$

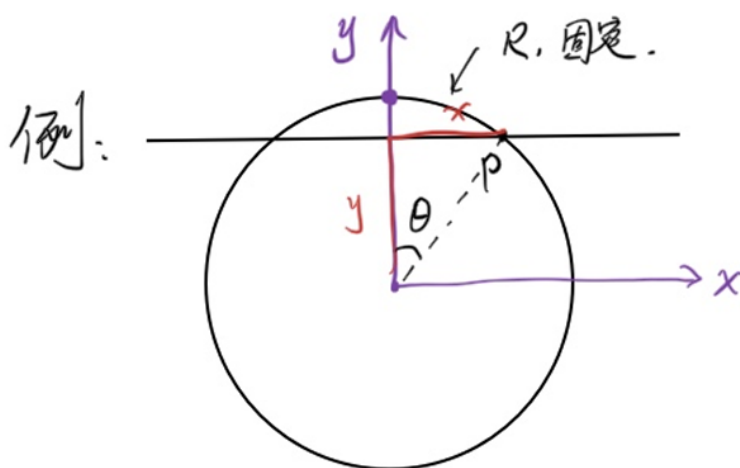
$$\begin{cases} v_x = -R\omega \sin \omega t, \\ v_y = R\omega \cos \omega t \end{cases}$$

$$\text{于是 } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\omega$$

$$\begin{cases} a_x = -R\omega^2 \cos \omega t, \\ a_y = -R\omega^2 \sin \omega t \end{cases}$$

$$\text{于是 } a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\omega^2$$

例2



有根子, 以恒定
速度 v 运动.
求当时.

求 $\vec{v}_P$, $\vec{a}_P$.

对于这个问题, 可以有两种处理方法:

1. 在直角坐标系中分解
2. 在极坐标系中分解

法一

不妨从圆的最上端开始计时:

$$\begin{cases} y = R - vt, \\ x = \sqrt{R^2 - y^2} = \sqrt{R^2 - (R - vt)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_y = \dot{y} = -v, \\ v_x = \dot{x} \\ = \frac{1}{2}(R^2 - (R - vt)^2)^{-\frac{1}{2}} [R^2 - (R - vt)^2]' \\ = \frac{1}{2}(R^2 - (R - vt)^2)^{-\frac{1}{2}} (-1)(-v)' 2(R - vt) \\ = (R^2 - (R - vt)^2)^{-\frac{1}{2}} (R - vt)v \\ = \frac{vy}{x} = \frac{v}{\tan \theta} \end{cases}$$

所以 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{v}{\sin \theta}$ (由速度分解易得)

$$\begin{cases} a_y = 0, \\ a_x = (v \frac{y(t)}{x(t)})' = v \frac{y'x - yx'}{x^2} = v \frac{xv_y - yv_x}{x^2} = -v^2 \frac{x^2 + y^2}{x^3} = -v^2 \frac{1}{R \sin^3 \theta} \end{cases}$$

这里需要注意一个常见错误:

$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = \vec{a}_x \Rightarrow \checkmark$

 $\begin{cases} \vec{a} = \dot{\vec{v}} \\ a_{tn} = \dot{v} \end{cases}$

$\star$ 注意: 常见错误做法. $\star$

$\star$ $a = (v_p)' = \dot{v}_p$ $\star$

$v_p = \frac{v}{\sin \theta} = \frac{v \cdot R}{x}$

$\Rightarrow \dot{v}_p = \left(\frac{v \cdot R}{x_{(t)}} \right)' = \frac{0 \cdot x_{(t)} - v \cdot R \cdot x'_{(t)}}{x^2}$

$\Rightarrow \dot{v}_p = -v^2 \cdot \frac{R^2 \cos \theta}{R^3 \sin^3 \theta} = -\frac{v^2}{R} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \neq a.$

$\star$ $\dot{v}_p = a_{tn}$

修正之后,就得到了:

法二

正确做法：

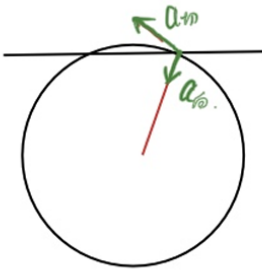
$$a_{\text{tan}} = \dot{v}_p = -\frac{v^2}{R} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}$$

$$a_{\text{ro}} = \frac{v_p^2}{R} = \frac{v^2}{R} \cdot \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{a_{\text{tan}}^2 + a_{\text{ro}}^2} = \frac{v^2}{R} \cdot \frac{1}{\sin^3\theta} \cdot \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

$$= \frac{v^2}{R} \cdot \frac{1}{\sin^3\theta} \Rightarrow \checkmark$$

法二. $\vec{a} = \vec{a}_{\text{tan}} + \vec{a}_{\text{ro}}$



AI总结(Sonnet 4.6)

微积分基础导论（物理竞赛向，侧重实用）分三大板块：

极限：从数列极限（ ϵ -N）到函数极限（ ϵ - δ ），掌握夹逼定理与四则运算法则，会算常见极限即可。

导数：理解“瞬时变化率即极限”的本质，熟记常见函数导数表，掌握加减、乘法、除法三大运算法则。

物理应用：速度 $v = \dot{r}$ ，加速度 $a = \ddot{r}$ ，用参数方程 + 求导处理圆周运动等几何问题。