

# 天体运动:万有引力定律应用

以轨道力学为主线，依次讨论椭圆轨道的几何与物理性质、抛物线轨道的面积速度法、三体稳定转动的拉格朗日解、位力定理的一般形式及其在天体系统中的应用，以及潮汐力的本质、洛希极限的推导与转动参考系下的卫星轨道变化。

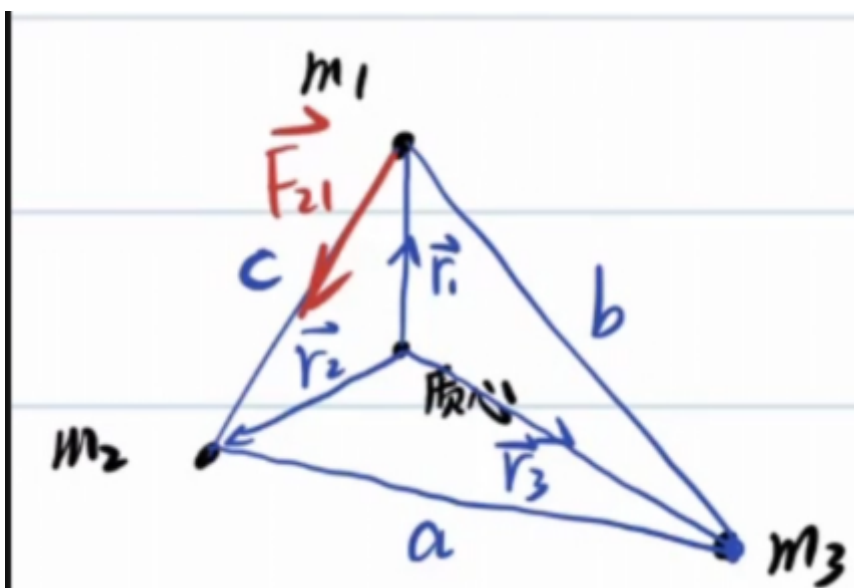
2026年6月8日 · 物理竞赛 · 微积分

## 朝花夕拾

证明:若质量为 $m_1, m_2, m_3$ 的三质点形成稳定转动形态后(均做圆周运动,周期相同),若三者**不共线**,则 $m_1, m_2, m_3$ 形成**正三角形**.

以质心为中心,换转动系,则 $m_1, m_2, m_3$ 静止.

引入惯性离心力:



$$\begin{aligned}
\vec{r}_c &= \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \vec{0} \\
\vec{F}_{12} &= G \frac{m_1 m_2}{c^2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \frac{1}{c} \\
&= G \frac{m_1 m_2}{c^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\
\vec{F}_{13} &= G \frac{m_1 m_2}{c^2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \frac{1}{c} \\
&= G \frac{m_1 m_2}{b^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \\
F_{\text{惯}1} &= m_1 \omega^2 \vec{r}_1 \\
\Rightarrow \begin{cases} G \frac{m_1 m_2}{c^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + G \frac{m_1 m_2}{b^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) + m_1 \omega^2 \vec{r}_1 = 0, \\ \vec{r}_3 = -\frac{-(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)}{m_3} \end{cases} \\
\left( \frac{Gm_2}{c^3} - \frac{Gm_2}{b^3} \right) \vec{r}_2 &= \left( \frac{Gm_1}{b^3} + \frac{Gm_3}{b^3} + \frac{Gm_2}{c^3} - \omega^2 \right) \vec{r}_1
\end{aligned}$$

又因为 $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ 不共线,只能有:

$$\begin{cases} \frac{Gm_2}{c^3} - \frac{Gm_2}{b^3} = 0, \\ \frac{Gm_1}{b^3} + \frac{Gm_3}{b^3} + \frac{Gm_2}{c^3} - \omega^2 = 0 \end{cases}$$

得到 $b = c$ ,同理 $a = b = c$ ,则三者构成的图形是正三角形.

顺便得到: $\omega = \sqrt{\frac{G(m_1+m_2+m_3)}{a^3}}$

此问题正是著名的**拉格朗日点**问题

本文推导的正三角形解对应 **L4、L5** 两个稳定拉格朗日点。

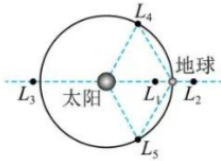
另外三个共线点 **L1、L2、L3** 由三体共线平衡条件（欧拉解）给出，

需对两大天体连线上的合力方程单独求解。

五个拉格朗日点合称欧拉-拉格朗日点。

附上一道练习题:

6. (2024·北京海淀·模拟预测)1772年,法籍意大利数学家拉格朗日在论文《三体问题》中指出:两个质量相差悬殊的天体(如太阳和地球)所在同一平面上有5个特殊点,如图中的 $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ 、 $L_4$ 、 $L_5$ 所示,人们称为拉格朗日点。若飞行器位于这些点上,会在太阳与地球共同引力作用下,可以几乎不消耗燃料而保持与地球同步做圆周运动。若发射一颗卫星定位于拉格朗日 $L_2$ 点,下列说法正确的是( )



- A. 该卫星绕太阳运动周期大于地球公转周期
- B. 该卫星在 $L_2$ 点处于平衡状态
- C. 该卫星绕太阳运动的向心加速度大于地球绕太阳运动的向心加速度
- D. 该卫星在 $L_2$ 处所受太阳和地球引力的合力比在 $L_1$ 处小

【答案】C

【详解】AC. 该卫星与地球同步绕太阳运动,可知卫星绕太阳运动周期等于地球公转周期,根据 $a = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$ 可知,该卫星绕太阳运动的向心加速度大于地球绕太阳运动的向心加速度,选项A错误,C正确;  
B. 该卫星绕太阳做匀速圆周运动,可知在 $L_2$ 点不是处于平衡状态,选项B错误;  
D. 该卫星在 $L_2$ 处所受太阳和地球引力的合力等于卫星绕太阳做圆周运动的向心力,则根据 $F = m\omega^2 r$ 因在 $L_2$ 点的转动半径大于在 $L_1$ 的转动半径,可知卫星在 $L_2$ 处所受太阳和地球引力的合力比在 $L_1$ 处大,选项D错误。  
故选C。

## 一:轨道

### 椭圆

#### 椭圆第一定义

$$r_1 + r_2 = 2a$$

对于椭圆的一根焦点弦,焦点把焦点弦分为长度为 $r_1$ 、 $r_2$ 两部分,有:

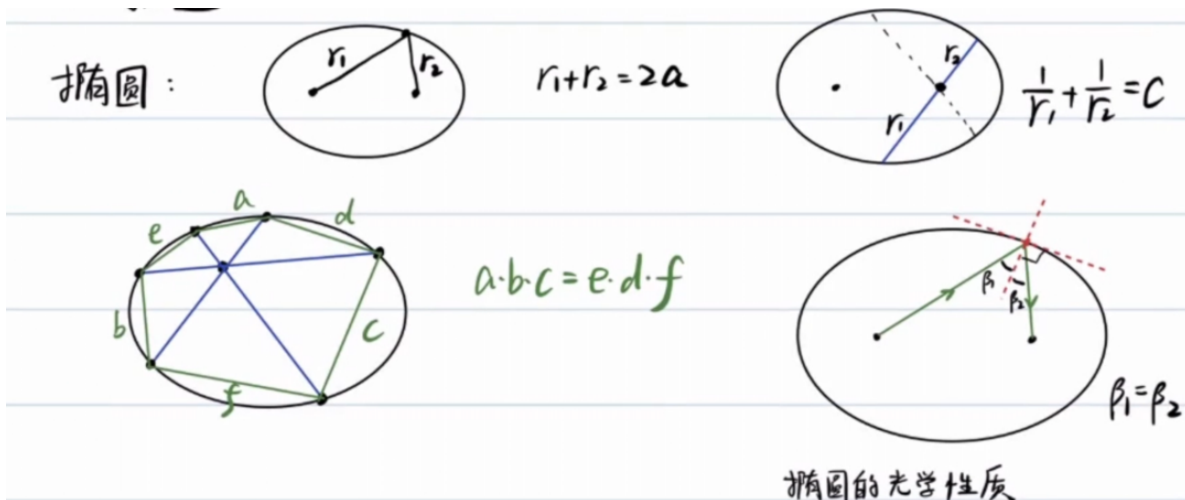
$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = C$$

过椭圆内一点做出三条弦,分别交椭圆与六个点,这六个点顺次连接,相邻点的距离分别为 $a, d, c, f, b, e$ ,有:

$$abc = edf$$

#### 椭圆的光学性质

在椭圆的一个焦点,发出一条光线,光线在椭圆上反射后的光线经过另一个焦点.



### 椭圆顶点的曲率半径

这个在微积分基础中已经证明.

长轴:  $\frac{b^2}{a}$ , 短轴:  $\frac{a^2}{b}$

计算方法:  $\rho = \frac{v^2}{a_n}$

其中:  $v$  为速度,  $a_n$  为法向加速度.

可以构造一个运动,在天体运动:万有引力定律我们已经研究过长轴处的速度情况,故考虑行星绕天体的运动.

在近日点(长轴顶点)处:

$$v^2 = GM \frac{a+c}{a-c} \frac{1}{a}$$

$$a_n = \frac{GM}{(a-c)^2}$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

在短轴顶点处:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{a}\right) = -\frac{GMm}{2a}$$

$$v^2 = \frac{GM}{a}$$

$$|\vec{a}_r + \vec{a}_n| = \frac{GM}{a^2}, a_n = |\vec{a}_r + \vec{a}_n| \frac{b}{a} = \frac{GMb}{a^3}$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{a^2}{b}$$

常见的与椭圆参量相关的物理量:

$$1. E = -\frac{GMm}{2a}$$

$$2. \delta = \frac{dS}{dt} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{L}{2m}$$

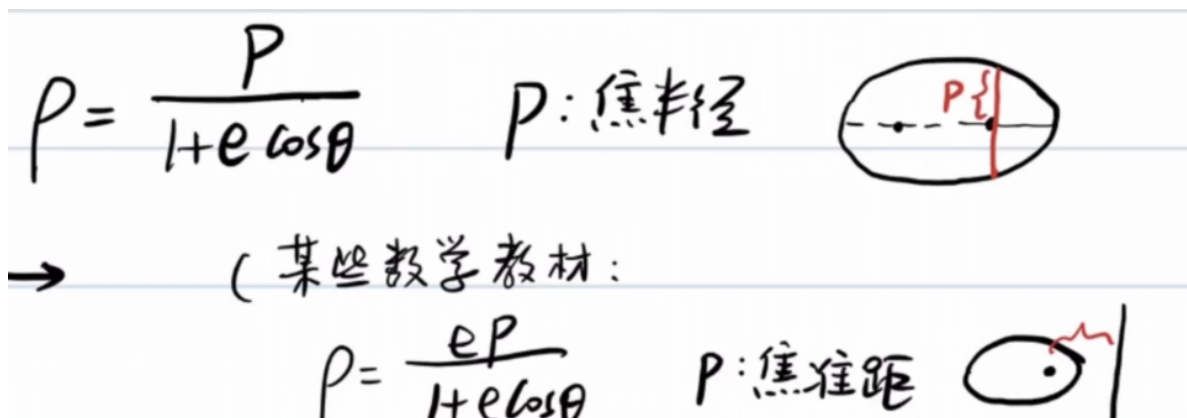
$$3. \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}, T = \frac{\pi ab}{\delta} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{\frac{3}{2}}$$

$$4. L = b\sqrt{-2mE}$$

$$5. r_n = a - c, r_f = a + c, b = \sqrt{r_n r_f}$$

椭圆的直角坐标方程:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

极坐标方程:  $\rho = \frac{p}{1+e \cos \theta}$ ,  $p = \frac{b^2}{a}$ , 其中  $p$  称为焦半径.



事实上,这一参数方程亦适用于其他圆锥曲线.

### 小试牛刀(椭圆的光学性质)

(28届复赛第一题:节选)

**例题 10** 如图 5-16 所示, 哈雷彗星绕太阳  $S$  沿椭圆轨道逆时针方向运动, 其周期  $T$  为 76.1 年, 1986 年它过近日点  $P_0$  时与太阳  $S$  的距离  $r_0 = 0.590$  AU, AU 是天文单位, 它等于地球与太阳的平均距离, 经过一段时间, 彗星到达轨道上的  $P$  点,  $SP$  与  $SP_0$  的夹角  $\theta_P = 72.0^\circ$ . 已知:  $1 \text{ AU} = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$ , 引力  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm/kg}^2$ , 太阳质量  $m_s = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ , 试求  $P$  到太阳  $S$  的距离  $r_p$  及彗星过  $P$  点时速度的大小及方向 (用速度方向与  $SP_0$  的夹角表示).

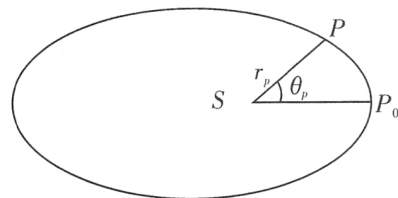


图 5-16

科普一下天文单位:

天文单位 (Astronomical unit, AU) 是天文学中计量天体之间距离的一种长度单位, 在数值上等于地球和太阳之间的平均距离, 现定义为 149597870.7 公里。它也可以被认为是地球公转轨道的半长轴长度, 即地球绕太阳椭圆轨道最大直径的一半的长度。

首先利用回归周期计算半长轴  $a$ :



$$\begin{aligned}\frac{\sin 2r_2}{2c} &= \frac{\sin 72^\circ}{2a - r_p} \\ \sin 2r_2 &= \frac{2c}{2a - r_p} \sin 72^\circ \\ r_2 &= \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2c}{2a - r_p} \sin 72^\circ\right) \\ &= 35.3^\circ \\ \varphi &= 90^\circ + (\theta - r_2) = 126.7^\circ = 127^\circ\end{aligned}$$

对于速度方向,我们还可以通过切线斜率求出:

$$\begin{aligned}x_p &= c + r_p \cos 72^\circ = 17.59 AU \\ y_p &= r_p \sin 72^\circ = 0.850 AU \\ k_{OP} k_v &= -\frac{b^2}{a^2} \\ k_v &= -1.34 \\ \varphi &= 127^\circ\end{aligned}$$

我们已经解决了P到太阳的距离及速度方向,该解决速度大小了:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GM_s m}{r_p}\right) &= -\frac{GM_s m}{2a} \\ v &= \sqrt{2\left(\frac{GM_s}{r_p} - \frac{GM_s}{2a}\right)} \\ &= 4.39 \times 10^4 m/s\end{aligned}$$

完结,撒花.

这里呈上质心标答:

第 28 届全国中学生物理竞赛复赛试卷

参考答案及评分标准

一、参考解答:

解法一

取直角坐标系  $Oxy$ , 原点  $O$  位于椭圆的中心, 则哈雷彗星的椭圆轨道方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(1)

$a$ 、 $b$  分别为椭圆的半长轴和半短轴, 太阳  $S$  位于椭圆的一个焦点处, 如图 1 所示.

以  $T_e$  表示地球绕太阳运动的周期, 则  $T_e = 1.00$  年. 以  $a_e$  表示地球到太阳的距离 (认

为地球绕太阳作圆周运动), 则  $a_e = 1.00 \text{ AU}$ , 根据开普勒第三定律, 有

$$\frac{a^3}{a_e^3} = \frac{T^2}{T_e^2} \quad (2)$$

设  $c$  为椭圆中心到焦点的距离, 由几何关系得

$$c = a - r_p \quad (3)$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad (4)$$

由图 1 可知,  $P$  点的坐标

$$x = c + r_p \cos \theta_p \quad (5)$$

$$y = r_p \sin \theta_p \quad (6)$$

把 (5)、(6) 式代入 (1) 式化简得

$$(a^2 \sin^2 \theta_p + b^2 \cos^2 \theta_p) r_p^2 + 2b^2 c r_p \cos \theta_p + b^4 c^2 - a^2 b^4 = 0$$

(7)

根据求根公式可得

$$r_p = \frac{b^2(a - c \cos \theta_p)}{a^2 \sin^2 \theta_p + b^2 \cos^2 \theta_p}$$

(8)

由 (2)、(3)、(4)、(8) 各式并代入有关数据得

$$r_p = 0.896 \text{ AU}$$

(9)

可以证明, 彗星绕太阳作椭圆运动的机械能为

第 6 页

$$E = -\frac{Gmm_s}{2a}$$

(10)

式中  $m$  为彗星的质量, 以  $v_p$  表示彗星在  $P$  点时速度的大小, 根据机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}mv_p^2 + \left(-\frac{Gmm_s}{r_p}\right) = -\frac{Gmm_s}{2a}$$

(11)

得

$$v_p = \sqrt{Gm_s} \sqrt{\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a}}$$

(12)

代入有关数据得

$$v_p = 4.39 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(13)

设  $P$  点速度方向与  $SP$  的夹角为  $\phi$  (见图 2), 根据开普勒第二定律

$$r_p v_p \sin[\phi - \theta_p] = 2a\sigma$$

(14)

其中  $\sigma$  为面积速度, 并有

$$\sigma = \frac{\pi ab}{T} \quad (15)$$

由 (9)、(13)、(14)、(15) 式并代入有关数据可

得

$$\phi = 127^\circ \quad (16)$$

解法二

取极坐标, 极点位于太阳  $S$  所在的焦点处, 由  $S$  引向近日点的射线为极轴, 极角为  $\theta$ , 取逆时针为正向, 用  $r$ 、 $\theta$  表示彗星的椭圆轨道方程为

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

(1)

其中,  $e$  为椭圆偏心率,  $p$  是过焦点的半正弦, 若椭圆的半长轴为  $a$ , 根据解析几何可知

$$p = a(1 - e^2)$$

(2)

将 (2) 式代入 (1) 式可得

第 7 页


**质心教育科技**  
 Center of Mass Educational Tech. Co., Ltd.

010-59519168  
www.eduzhixin.com

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (3)$$

以  $T_e$  表示地球绕太阳运动的周期, 则  $T_e = 1.00$  年; 以  $a_e$  表示地球到太阳的距离 (认为地球绕太阳作圆周运动), 则  $a_e = 1.00 \text{ AU}$ . 根据开普勒第三定律, 有

$$\frac{a^3}{a_e^3} = \frac{T^2}{T_e^2} \quad (4)$$

在近日点  $\theta = 0$ , 由 (3) 式可得

$$e = 1 - \frac{r_0}{a} \quad (5)$$

将  $\theta_p$ 、 $a$ 、 $e$  的数据代入 (3) 式即将

$$r_p = 0.895 \text{ AU} \quad (6)$$

可以证明, 行星绕太阳作椭圆运动的机械能

$$E = -\frac{Gmm_s}{2a} \quad (7)$$

式中  $m$  为行星的质量, 以  $v_p$  表示行星在  $P$  点时速度的大小, 根据机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}mv_p^2 + \left(-\frac{Gmm_s}{r_p}\right) = -\frac{Gmm_s}{2a} \quad (8)$$

可得

$$v_p = \sqrt{Gm_s} \sqrt{\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a}} \quad (9)$$

代入有关数据得

$$v_p = 4.39 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (10)$$

设  $P$  点速度方向与极轴的夹角为  $\varphi$ , 行星在近日点的速度为  $v_0$ , 得根据角动量守恒定律, 有

$$r_p v_p \sin(\theta - \theta_p) = r_0 v_0$$

第 8 页


**质心教育科技**  
 Center of Mass Educational Tech. Co., Ltd.

010-59519168  
www.eduzhixin.com

(11)  
根据 (8) 式, 同理可得

$$v_0 = \sqrt{Gm_s} \cdot \sqrt{\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}}$$

(12)  
由 (6)、(10)、(11)、(12) 式并代入其它有关数据

$$\varphi = 127^\circ$$

(13)

评分标准:

本题 20 分

解法一

(2) 式 3 分, (8) 式 4 分, (9) 式 2 分, (11) 式 3 分, (13) 式 2 分, (14) 式 3 分, (15) 式 1 分, (16) 式 2 分.

解法二

(3) 式 2 分, (4) 式 3 分, (5) 式 2 分, (6) 式 2 分, (8) 式 3 分, (10) 式 2 分, (11) 式 3 分, (12) 式 1 分, (13) 式 2 分.

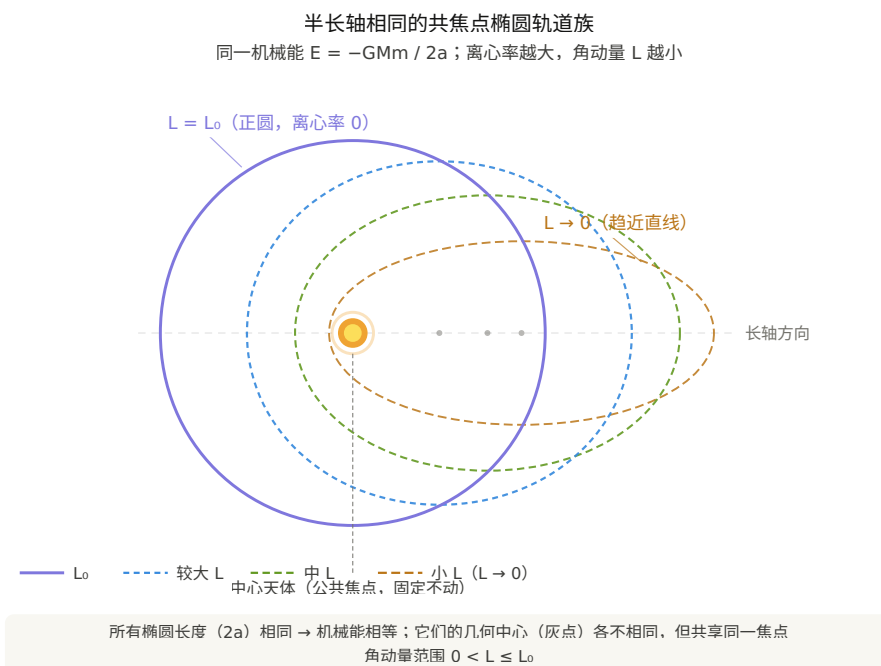
## 椭圆轨道比较

对于半长轴  $a$  不变的轨道, 它们的机械能都等于  $-\frac{GMm}{2a}$

不难看出, 这些轨道的极端情况是接近直线和接近正圆.

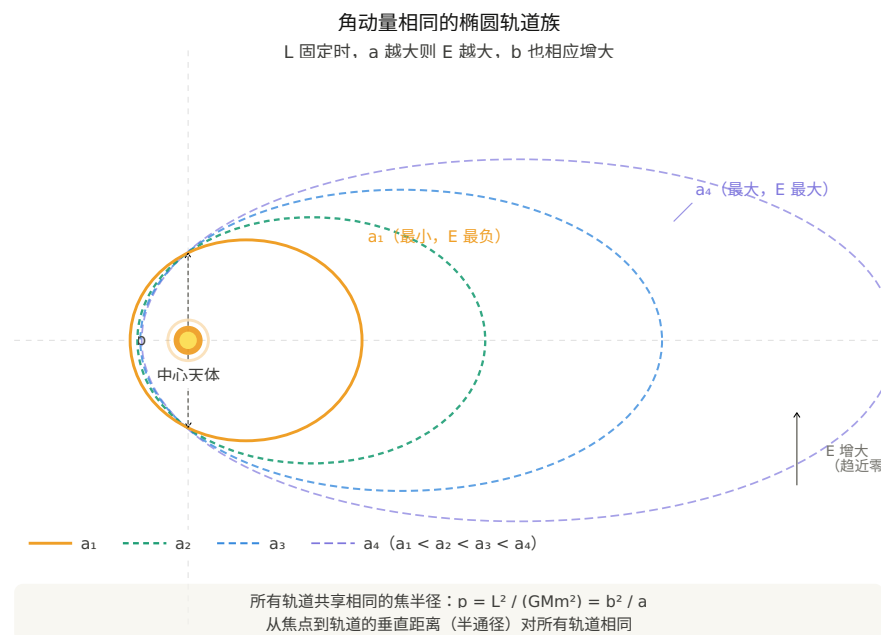
角动量  $L = b\sqrt{-2mE}$ , 在轨道接近直线时  $L \rightarrow 0$ , 在轨道接近正圆时,  $L$  变大.

所以,  $0 < L \leq L_0$



对于角动量  $L$  不变的轨道,显然半长轴  $a$  越大,机械能  $E$  越大,相应  $b$  必须增大.

容易证明,焦半径  $p = \frac{L^2}{GMm^2}$  为一定值.

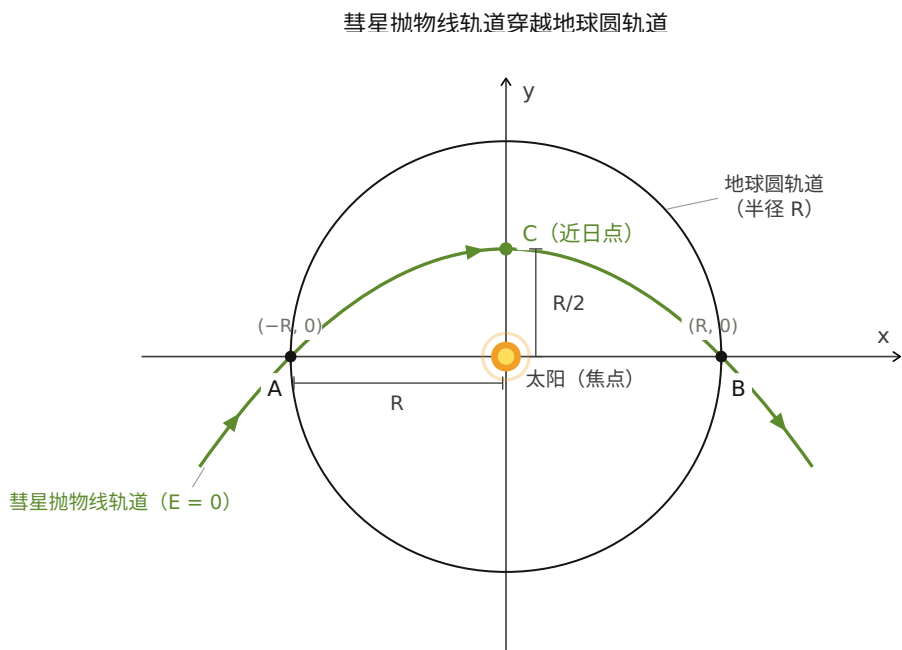


## 抛物线轨道

在以太阳为原点的日心坐标系中,地球绕太阳做匀速圆周运动,轨道半径为  $R$ ,周期  $T_{\text{地}} = 1$  年。

一颗彗星沿抛物线轨道掠过太阳系,其机械能  $E = 0$ ,太阳位于该抛物线的焦点。彗星的近日点  $C$  位于  $y$  轴正方向,到太阳的距离为  $R/2$  (即近日距  $q = R/2$ )。该抛物线轨道与地球圆轨道相交于  $A$ 、 $B$  两点,二者位于  $x$  轴上,坐标为  $A(-R, 0)$ 、 $B(R, 0)$ 。

求：彗星沿抛物线由  $A$  经近日点  $C$  到  $B$  所经历的时间  $t_{AB}$ 。



由图可知,  $p = R = \frac{L^2}{GMm^2} = \frac{4\delta^2}{GM}$ ,  $\delta = \frac{1}{2}\sqrt{GMR}$

显然抛物线方程为  $x^2 = -2p(y - \frac{R}{2}) = -2R(y - \frac{R}{2})$

也就是说,  $y = -\frac{x^2}{2R} + \frac{R}{2}$

分析一下地球运动周期:

$$\frac{GMm_e}{R^2} = m_e \frac{4\pi^2}{T^2} R$$

$$GM = 4\pi^2 \frac{R^3}{T^2}$$

借助彗星扫过的面积  $S$  和面积速度  $\delta$ , 可以求出运动时间:

$$S = \int_{-R}^R \left(-\frac{x^2}{2R} + \frac{R}{2}\right) dx = \frac{2R^2}{3}$$

$$t = \frac{S}{\delta} = \frac{\frac{2}{3}R^2}{\frac{1}{2}\sqrt{GMR}} = \frac{4R^2}{3\sqrt{4\pi^2 \frac{R^4}{T^2}}}$$

$$= \frac{2T}{3\pi} = 77.5 \text{ day}$$

# 位力定理

**位力定理**（英语：Virial theorem，又称维里定理、均功定理）是[力学]中描述稳定的多自由度孤立体系的**总动能**和**总势能**时间平均之间的数学关系。

## 基本表达式

考虑一个有  $N$  个质点的体系，其数学表达式为：

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k \rangle$$

其中：

- 角括号  $\langle \dots \rangle$  表示对时间取平均；
- $T$  是系统内部的总动能；
- $\mathbf{F}_k$  是第  $k$  个质点所受的合力；
- $\mathbf{r}_k$  是第  $k$  个质点的位置向量；
- 等式右边称作**均位力积**（virial），反映体系内相互作用强度。

英语 virial 一词由德国物理学家**鲁道夫·克劳修斯**于 1870 年根据拉丁语单词  $vīs$ （意为力、能量）命名。

## 幂次势下的简化形式

若系统内任意两粒子之间的力来自与粒子间距  $r$  的  $n$  次幂成正比的势能

$$V(r) = \alpha r^n \quad (\alpha, n \text{ 为常数})$$

则定理简化为：

$$2\langle T \rangle = n\langle V_{\text{total}} \rangle$$

即体系总动能的 2 倍等于总势能的  $n$  倍。

| 势能类型     | $n$ | 结论                                        |
|----------|-----|-------------------------------------------|
| 引力 / 库仑势 | -1  | $2\langle T \rangle = -\langle V \rangle$ |
| 谐振子势     | 2   | $\langle T \rangle = \langle V \rangle$   |

## 意义与适用范围

位力定理的重要意义在于，它允许计算平均总动能，即便对于那些**无法精确求解的复杂系统**（例如统计力学中考虑的多体系统）也同样适用。

- 根据**能量均分定理**，平均总动能与系统温度相关；
- 然而位力定理**不依赖温度概念**，甚至适用于不处于热平衡的系统；
- 该定理已被推广至多种形式，特别是**张量形式**。

特别的,对于稳定的多体运动,若各质点相对位置不变,则系统总动能和总势能不变,恒有:

$$2E_k = -E_p$$

## 简单证明

设 $n$ 个质量相同的质点组成正 $n$ 边形,稳定地做半径为 $r_0$ 的匀速圆周运动.

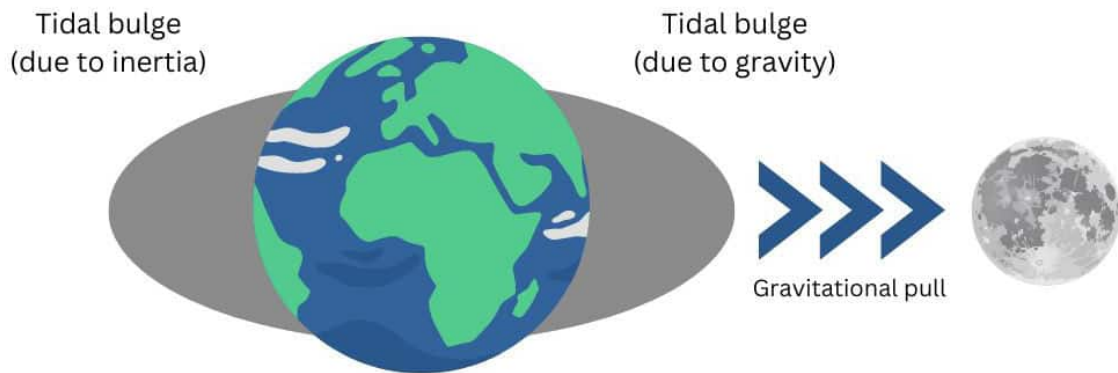
每个质点受到的向心力 $F(r_0) = m \frac{v^2}{r_0} = \frac{A}{r_0^2}$

$$E_k = n \frac{1}{2} m v^2 = \frac{n}{2} r_0 m \frac{v^2}{r_0} = \frac{n}{2} r_0 F(r_0)$$

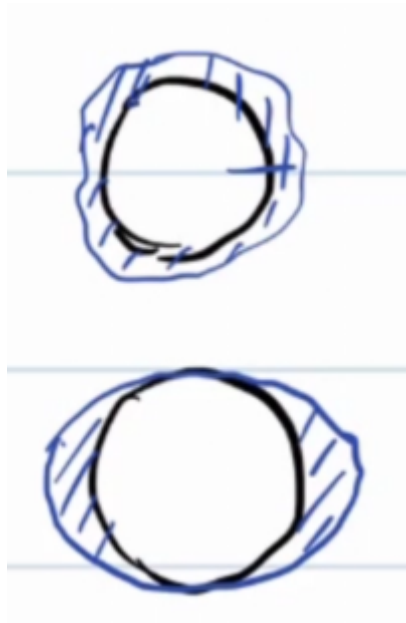
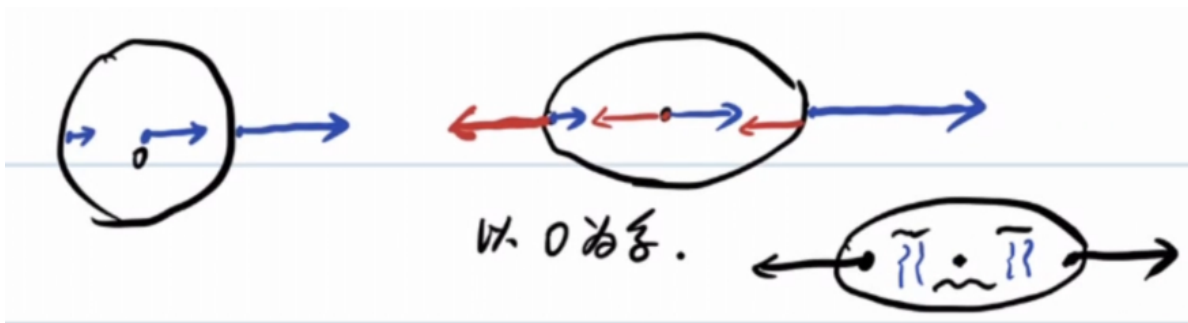
使用虚功原理,让每个质点沿着径向方向移动 $dr$ .

$$\begin{aligned} dE_p &= nF(r)dr \\ E_p &= \int_{\infty}^{r_0} n \frac{A}{r^2} dr = -nA \frac{1}{r_0} = -2E_k \end{aligned}$$

## 二:潮汐



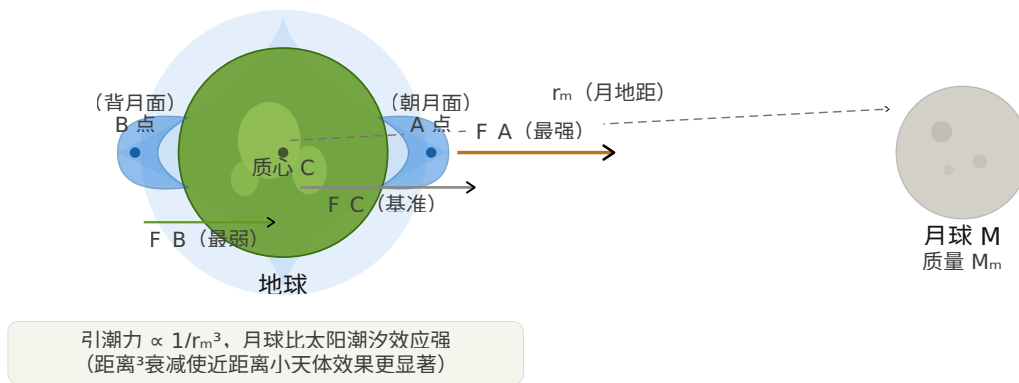
潮汐的本质是**引力差**,地球半径造成的月球引力变化不可忽略.



把水额外拉高的力,称为**引潮力**.

以地球质心为惯性系,这样地球各点受到与质心所受引力相同的惯性力.

潮汐隆起：引力差造成两侧凸起



设月(m)onth地距离为 $r_m$ ,地球半径为 $R$

$$\begin{aligned}
 a_c &= \frac{GM_m}{r_m^2} \\
 F_A &= \Delta m a_c = \frac{GM_m \Delta m}{(r_m + R)^2} \\
 &= \frac{GM_m \Delta m}{r_m^2} - \frac{GM_m \Delta m}{(r_m + R)^2} \\
 &= \frac{GM_m \Delta m}{r_m^2} \left( 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{r_m}\right)^2} \right) \\
 &\approx \frac{GM_m \Delta m}{r_m^3} 2R \propto \frac{1}{r_m^3}
 \end{aligned}$$

同理  $F_B = \frac{GM_m \Delta m}{r_m^3} 2R \propto \frac{1}{r_m^3}$

审视一下计算结果，被吸引物体越大，**引潮力**越大，更容易被撕裂。

当天体靠近大质量中心体近到某个临界距离时，中心体对该天体的引潮力将超过天体自身的自引力，天体就会被撕碎，这一临界距离称为**洛希极限**：

$$\begin{aligned}
 \frac{GM_M \Delta m}{d^3} 2R &= \frac{GM \Delta m}{R^2} \\
 d &= 2^{\frac{1}{3}} R_M \left( \frac{M_m}{m} \right)^{\frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

事实上,上面把卫星当作无形变的刚体质点，忽略了两个效应：

卫星本身因引潮力被拉伸变形（椭球化），增大了近端距离，自引力减弱；卫星绕轨道运动的离心效应。

修正系数后得到：

$$d \approx 2.44 R_M \left( \frac{M_M}{m} \right)^{1/3}$$

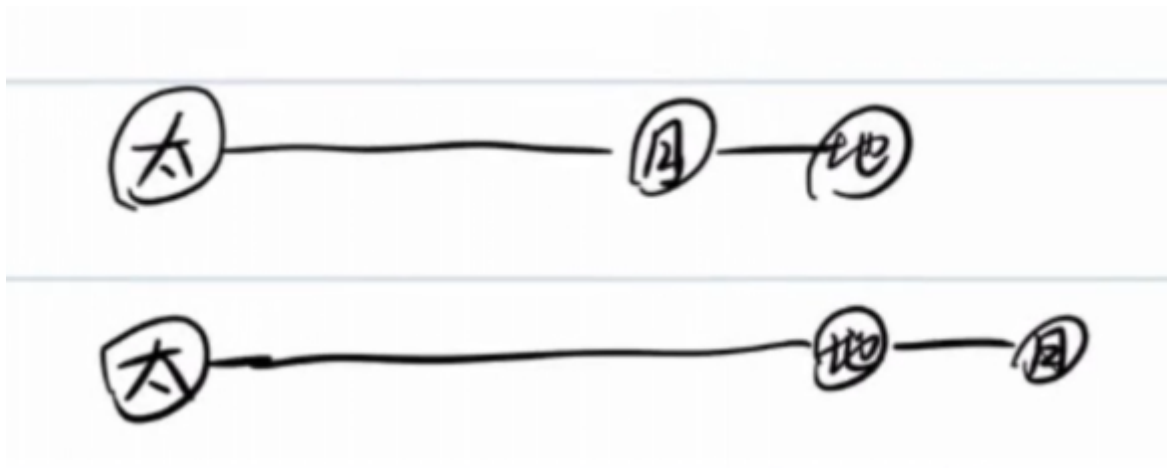
大卫星和小卫星在同一轨道上受到的引潮力虽然不同（大的更强），但大卫星的自引力也按同样比例增大，两者恰好抵消，**洛希极限与卫星尺寸无关**。

土星环正是卫星或彗星越过洛希极限后被潮汐力撕裂、散布成碎片环的遗迹。

在《星际穿越》中展示了这一点：主角团登陆的米勒星球极度靠近超大质量黑洞 **卡冈图雅**，强烈的引潮力在星球海洋上激起数十米高的周期性巨浪；而库珀驾驶飞船贴近黑洞时，飞船恰好处于洛希极限之外——一旦越过，引潮力将直接将飞船撕碎。（Sonnet 4.6告诉我的，我本人没有看过）

不难算出  $\frac{F_m}{F_s} \approx 2.2$ ，太阳对地球的引潮力小于月球造成的引潮力。

在一个月内,大概在初一/十五有两次**大潮**(太阳,月球,地球共线)



上初一,下十五

**小潮:**  $\angle \text{日地月} = 90^\circ$ , 太阳和月亮对地球形成的引潮力正交, 效果上相互抵消

直观感受潮汐:



圣米歇尔山涨退潮

### 三:转动参考系

26届复赛的送分题:

2. 若不考虑太阳和其他星体的作用, 则地球-月球系统可看成孤立系统。若把地球和月球都看作是质量均匀分布的球体, 它们的质量分别为  $M$  和  $m$ , 月心-地心间的距离为  $R$ , 万有引力恒量为  $G$ 。学生甲以地心为参考系, 利用牛顿第二定律和万有引力定律, 得到月球相对于地心参考系的加速度为  $a_m = G \frac{M}{R^2}$ ; 学生乙以月心为参考系, 同样利用牛顿第二定律和万有引力定律, 得到地球相对于月心参考系的加速度为  $a_e = G \frac{m}{R^2}$ 。这二位学生求出的地-月间的相对加速度明显矛盾, 请指出其中的错误, 并分别以地心参考系(以地心速度作平动的参考系)和月心参考系(以月心速度作平动的参考系)求出正确结果。

以一个运动的物体为惯性系, 应该引入惯性力:

以地球为惯性系, 月球所受的惯性力与月地引力相同:

$$F = \frac{GMm}{R^2} + m \frac{Gm}{R^2} = ma \implies a = \frac{G(M+m)}{R^2}$$

以月球为惯性系同理可以算出一样的结果, 与伽利略变换不矛盾。

#### 例1

有一颗卫星做匀速圆周运动, 运动周期为  $T$ , 线速度为  $v_0$ , 运动半径为  $r$ 。

若卫星法向或切向(运动同向)获得一个速度 $u_n$ 或 $u_\tau$ (均小于 $(\sqrt{2}-1)v_0$ ),这样行星以椭圆轨道运动),求:

(1) $T'_n, T'_\tau$

(2)若 $u_n = u_t$ ,比较 $T'_n, T'_\tau$ 的大小.

考虑机械能变化和位力定理的结合:

如果法向方向额外获得 $u_n$ ,则:

$$\begin{aligned}\frac{T'_n}{T} &= \left(\frac{a'_n}{r}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{E_0}{E'_n}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(\frac{-\frac{1}{2}mv_0^2}{-mv_0^2 + \frac{1}{2}m(v_0^2 + u_n^2)}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(\frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{mv_0^2 - \frac{1}{2}m(v_0^2 + u_n^2)}\right)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

如果法向方向(与运动方向相同)额外获得 $u_\tau$ ,则:

$$\begin{aligned}\frac{T'_\tau}{T} &= \left(\frac{a'_\tau}{r}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{E_0}{E'_\tau}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(\frac{-\frac{1}{2}mv_0^2}{-mv_0^2 + \frac{1}{2}m(v_0 + u_t)^2}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(\frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{mv_0^2 - \frac{1}{2}m(v_0 + u_t)^2}\right)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

显然,如果 $u_n = u_t$ ,则 $T'_n < T'_\tau$

## 例2

2018年1月31日晚,发生了超级 蓝血 月全食(blue moon)

当然,这里的蓝月亮不是洗衣液.

blue moon:一个公历月出现了第二次满月.

## 尾声

回头看这篇笔记,从椭圆轨道出发,绕了一大圈——

彗星掠过太阳,用面积速度算时间;

三体转动,逼出正三角形和拉格朗日点;

潮汐撕碎卫星,土星环是引力留下的残骸;

最后卫星被推一脚,轨道周期就这么变了。

这些内容表面上毫不相关，但核心都是同一个问题：**在引力主导的世界里，物体倾向于做什么？**

答案是：绕圈、变形、被撕碎，或者稳稳地待在拉格朗日点上——  
取决于它离危险有多近。