

单调有界必重复

(2024·徐州模拟) 对于每项均是正整数的数列 $P: a_1, a_2, \dots, a_n$, 定义变换 T_1 , T_1 将数列 P 变换成数列 $T_1(P): n, a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_n - 1$ 。对于每项均是非负整数的数列 $Q: b_1, b_2, \dots, b_m$, 定义 $S(Q) = 2(b_1 + 2b_2 + \dots + mb_m) + b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_m^2$

2026年4月18日 · 高考数学 · 数列

(2024·徐州模拟) 对于每项均是正整数的数列 $P: a_1, a_2, \dots, a_n$, 定义变换 T_1 , T_1 将数列 P 变换成数列 $T_1(P): n, a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_n - 1$ 。对于每项均是非负整数的数列 $Q: b_1, b_2, \dots, b_m$, 定义 $S(Q) = 2(b_1 + 2b_2 + \dots + mb_m) + b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_m^2$, 定义变换 T_2 , T_2 将数列 Q 中的项**从大到小排列**, 然后**去掉所有为零的项**, 得到数列 $T_2(Q)$ 。

(1) 若数列 P_0 为 2, 4, 3, 7, 求 $S(T_1(P_0))$ 的值。

(2) 对于每项均是正整数的有穷数列 P_0 , 令 $P_{k+1} = T_2(T_1(P_k))$, $k \in \mathbb{N}$ 。

(i) 探究 $S(T_1(P_0))$ 与 $S(P_0)$ 的关系;

(ii) 证明: $S(P_{k+1}) \leq S(P_k)$ 。

(1) $T_1(P_0): 4, 1, 3, 2, 6,$

$$S(T_1(P_0)) = 2(1 \times 4 + 2 \times 1 + 3 \times 3 + 4 \times 2 + 5 \times 6) + 4^2 + 1^2 + 3^2 + 2^2 + 6^2 = 2 \times 53 + 66 = 172$$

(2)(i)

$$\begin{aligned} & S(T_1(P_0)) \\ &= 2[n + 2(a_1 - 1) + 3(a_2 - 1) + \dots + (n + 1)(a_n - 1)] + n^2 + \sum_{i=1}^n (a_i - 1)^2 \\ &= 2\left[n - \frac{n(n+3)}{2}\right] + n^2 + n + 2(a_1 + 2a_2 + \dots + na_n) + 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\ &= 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \sum_{i=1}^n a_i^2 \\ &= S(P_0) \end{aligned}$$

(ii)

由(i)知: $S(T_1(P_0)) = S(P_0)$,只能是 T_2 导致了 S 变小:

下面证明: $S(T_2(A)) < S(A)$.

T_2 操作不会改变平方和的大小,但是让大的数放到了前面,拥有了较小的系数;让小的数放到后面,拥有了较大的系数,相当于变成了较小的逆序和.

[!TIP] 注意 T_2 的操作顺序 将数列 Q 中的项从大到小排列,然后去掉所有为零的项

虽然先去零和先排序最后的结果是一样的,但是这个先后顺序可以辅助我们书写过程.

典例2 解:(1)依题意, $P_0:2,4,3,7, T_1(P_0):4,1,3,2,6$.
卡壳点:严格按照题目中定义的运算求解.
 $S(T_1(P_0))=2(4+2\times1+3\times3+4\times2+5\times6)+16+1+9+4+36=172$.
(2)(i)记 $P_0:a_1,a_2,\dots,a_n(a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbb{N}^*)$,
 $T_1(P_0):n,a_1-1,a_2-1,\dots,a_n-1$,
 $S(T_1(P_0))=2[n+2(a_1-1)+3(a_2-1)+\dots+(n+1)(a_n-1)]$
 $+n^2+(a_1-1)^2+(a_2-1)^2+\dots+(a_n-1)^2$,
 $S(P_0)=2(a_1+2a_2+3a_3+\dots+na_n)+a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2$,
卡壳点:按照所给的运算逐步求解.
 $S(T_1(P_0))-S(P_0)=2n+2a_1+2a_2+\dots+2a_n-4-6-\dots-2(n+1)+n^2-2a_1-2a_2-\dots-2a_n+n=n^2+3n-\frac{(2n+6)\cdot n}{2}=0$,所以 $S(T_1(P_0))=S(P_0)$.
(ii)设 A 是每项均为非负整数的数列 $a_1,a_2,\dots,a_n$,
当存在 $1\leq i<j\leq n$,使得 $a_i\leq a_j$ 时,交换数列 A 的第 i 项与第 j 项得到数列 B ,
则 $S(B)-S(A)=2(ia_j+ja_i-ia_i-j a_j)=2(i-j)(a_j-a_i)\leq 0$,
当存在 $1\leq m\leq n$,使得 $a_{m+1}=a_{m+2}=\dots=a_n=0$ 时,若记数列 $a_1,a_2,\dots,a_m$ 为 C ,则 $S(C)=S(A)$,
因此 $S(T_2(A))\leq S(A)$,从而对于任意给定的数列 P_0 ,
由 $P_{k+1}=T_2(T_1(P_k))(k=0,1,2,\dots)$, $S(P_{k+1})\leq S(T_1(P_k))$,
由(i)知 $S(T_1(P_k))=S(P_k)$,所以 $S(P_{k+1})\leq S(P_k)$.

参考答案

答案还算比较正常,相当于证明了排序不等式

为什么先去零书写更加困难?因为如果先去零,假如中间有0,那么 S 的值可能会改编.而先排序使得0都在末尾,去零不影响 S .

最后再加一问,来自于2026北京二中高二(下)四学段段考:

(III)证明:对于任意给定的每项均为正整数的有穷数列 A_0 ,存在正整数 K ,当 $k\geq K$ 时, $S(A_{k+1})=S(A_k)$

[!TIP] 考虑 S 的有界性,单调性与离散性

(21) (2025大兴) (本小题15分)

对于正整数 n ,定义 $T(n)$ 为 n 的各位数字的平方和.已知无限数列 $\{a_n\}$ 满足: a_1 为正整数,且对于任意的 $n\in\mathbb{N}^*$, $a_{n+1}=T(a_n)$.

(I) 若 $a_1=2$,求 a_2,a_3,a_4,a_5 的值;

(II) 若 a_1 是一个三位数,是否存在 a_1 ,使得 a_1,a_2,a_3 递增?若存在,求出所有满足条件的 a_1 的值;若不存在,说明理由;

(III) 证明:对任意的正整数 a_1 ,总存在正整数 K 和 T ,使得对任意的 $n>K$, $a_{n+r}=a_n$.

所以 $a_2 < a_1$ ，与 $a_2 > a_1$ 矛盾.5 分

综上，不存在 a_1 ，使得 a_1, a_2, a_3 递增.

(III) 当 $a_n \geq 1000$ 时，设 a_n 是一个 k 位数，则 $a_n \geq 10^{k-1}$ ($k \geq 4$)，

所以 $a_{n+1} = T(a_n) \leq k \cdot 9^2 = 81k$.

当 $k \geq 4$ 时， $81k < 10^{k-1}$.

所以 $a_{n+1} = T(a_n) < a_n$.

所以存在 $N > n$ ，且 $a_N < 1000$3 分

当 $a_n < 1000$ 时， $a_{n+1} = T(a_n) \leq 3 \cdot 9^2 = 243$ ，

所以 $a_{n+1} \in S = \{1, 2, 3, \dots, 243\}$.

因为数列 $\{a_n\}$ 为无穷数列，

集合 $S = \{1, 2, 3, \dots, 243\}$ 为有限集合，且 $a_{n+1} = T(a_n)$ ，

所以数列 $\{a_n\}$ 在集合 S 中的取值必然会出现重复.

所以存在当 $p > q$ 时，有 $a_p = a_q$.

取 $K = q$ ，则 $T = p - q$.

所以对任意的正整数 a_1 ，

总存在正整数 K 和 T ，使得对任意的 $n > K$ ， $a_{n+T} = a_n$6 分

第三问参考答案

两道题的(III)如出一辙,都利用了**离散性**与**有界性**,留给读者自行思考.