

每日艺题:蒙日圆

Intro 法国数学家加斯帕尔·蒙日发现：与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 相切的两条垂直切线的交点的轨迹方程是 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 。这一结论被称为蒙日圆。 Prove Plan Mode 如何考虑直线与椭圆相切? 最显然的想法是让直线与椭圆联立所得一元二次方程判别式为0. 如何考虑两条直线垂直? 可以算出两条直线分别对应的斜率 k_1, k_2

2026年8月30日

Intro

法国数学家加斯帕尔·蒙日发现：与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 相切的两条垂直切线的交点的轨迹方程是 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 。这一结论被称为蒙日圆。

Prove

Plan Mode

如何考虑直线与椭圆相切?

最显然的想法是让直线与椭圆联立所得一元二次方程判别式为0.

如何考虑两条直线垂直?

可以算出两条直线分别对应的斜率 k_1, k_2 , 让 $k_1 k_2 = -1$.

同时,还应该考虑斜率不存在的情况.

Goal Mode

设两垂直直线的公共点为 $P(x_0, y_0)$, 直线方程为 $y = k(x - x_0) + y_0 = kx + (y_0 - kx_0)$

联立椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与直线:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2[kx + (y_0 - kx_0)]^2 = a^2b^2$$

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2k(y_0 - kx_0)x + a^2[(y_0 - kx_0)^2 - b^2] = 0$$

$$\Delta = 4a^4k^2(y_0 - kx_0)^2 - 4(a^4k^2 + a^2b^2)[(y_0 - kx_0)^2 - b^2] = 0$$

$$a^2k^2(y_0 - kx_0)^2 - (a^2k^2 + b^2)[(y_0 - kx_0)^2 - b^2] = 0$$

$$a^2b^2k^2 - b^2(y_0 - kx_0)^2 + b^4 = 0$$

$$a^2k^2 - (y_0 - kx_0)^2 + b^2 = 0$$

$$(a^2 - x_0^2)k^2 + 2x_0y_0k + (b^2 - y_0^2) = 0$$

最后得到了关于 k 的一元二次方程:

$$(a^2 - x_0^2)k^2 + 2x_0y_0k + (b^2 - y_0^2) = 0$$

要求 $k_1k_2 = \frac{a^2 - x_0^2}{b^2 - y_0^2} = -1$, 即 $x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$.

因此,我们可以说明,满足条件的点轨迹几乎是一个圆.

对于斜率不存在的**corner case**,我们应加以讨论:

当其中一条直线斜率不存在时,另一条直线斜率为0,这给出 $(a, b), (a, -b), (-a, b), (-a, -b)$ 四个点.

经检验,四个点悉数满足 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

因此,满足条件的点轨迹为以原点为圆心, $\sqrt{a^2 + b^2}$ 为半径的圆.

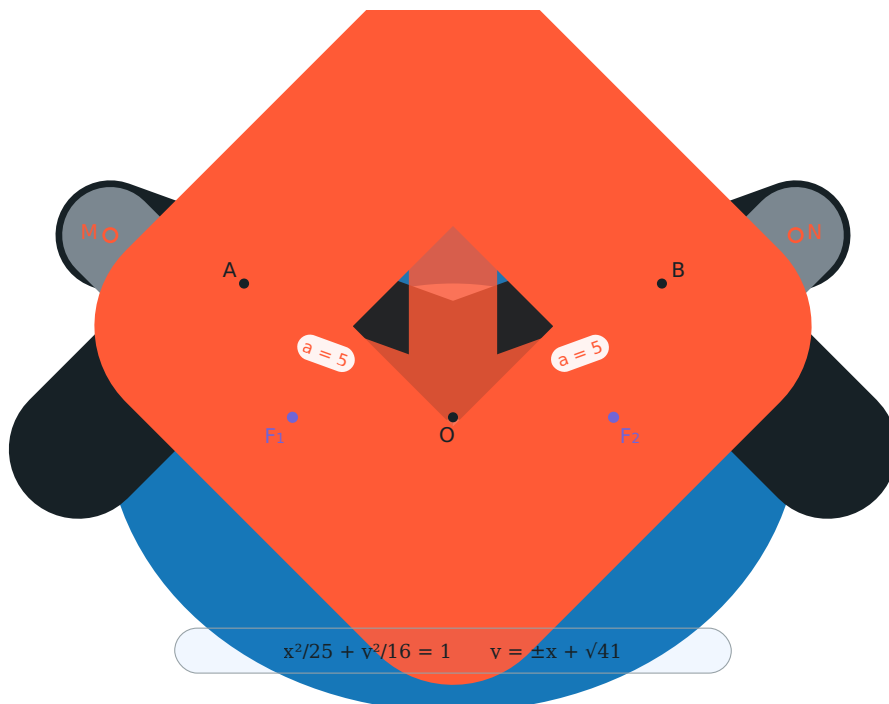
Alternative

一个惊人的想法是,使用椭圆的光学性质,构建一个以 $P(x_0, y_0)$ 为顶点的矩形.

设两条切线与椭圆分别相切于 A, B .将左焦点 F_1 关于 PA 对称到点 M ,将右焦点 F_2 关于 PB 对称到点 N .根据椭圆的光学性质, F_2, A, M 与 F_1, B, N 分别三点共线,且

$$F_2M = F_1N = 2a.$$

连接 F_1M 交 PA 于点 Q ,连接 F_2N 交 PB 于点 S ,再延长二者交于点 R .



焦点关于切线对称后得到两条长度为 $2a$ 的反射光路，并由垂直切线构成辅助矩形PQRS。

因为 Q, S 分别是 F_1M, F_2N 的中点, O 是 F_1F_2 的中点,由中位线定理知:

$$OQ = \frac{1}{2}F_2M = a, \quad OS = \frac{1}{2}F_1N = a.$$

又因为 $PA \perp PB$,所以 $PQRS$ 是矩形, $\angle F_1RF_2 = 90^\circ$.在直角三角形 F_1RF_2 中, O 是斜边 F_1F_2 的中点,故

$$OR = \frac{1}{2}F_1F_2 = c.$$

应用熟知的矩形几何结论:

$$OP^2 + OR^2 = OQ^2 + OS^2$$

$$OP^2 = 2a^2 - c^2 = a^2 + b^2.$$

同样,我们又得到了圆的半径 $OP = \sqrt{a^2 + b^2}$

Practice

(上海交通大学)对于两条**互相垂直**的直线和一个**椭圆**,已知椭圆无论如何滑动都与两条直线**相切**,求椭圆中心的轨迹.

设两条互相垂直的直线为 x, y 轴,其交点为原点 O ,椭圆半长轴为 a ,半短轴为 b ,椭圆中心 $C(x, y)$.

此题恰是蒙日圆的反问题:已知蒙日圆的一切条件,但是椭圆中心为定点.

类似的,我们可以得到 $OC = \sqrt{a^2 + b^2}$,但是切忌不能认为点C的轨迹为一个正圆:

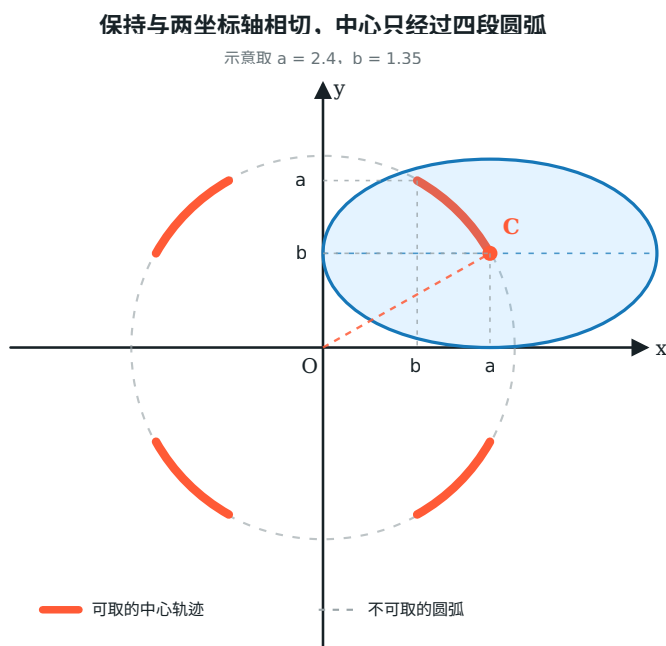
点C不能取到圆上的所有点,因为有些点会让椭圆C与两条坐标轴必然无法相切.

我们更细化分析临界条件:椭圆中心C到坐标轴的最近情况.

设长度为 a 的半轴与 x 轴的夹角为 θ ,则椭圆中心到两条坐标轴的距离分别为

$$|x_C| = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}, \quad |y_C| = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}.$$

二者的平方和恒为 $a^2 + b^2$,但每个距离都不能小于椭圆的较短半轴.下图中,椭圆在第一象限内保持与两坐标轴相切,点C描出的橙色圆弧即为轨迹的一部分;其余三段由对称性得到.



椭圆中心的轨迹不是整个蒙日圆，而是满足坐标绝对值下界的四段圆弧。

因此,椭圆中心C的轨迹为:

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2, \quad |x|, |y| \geq \min\{a, b\}$$