

反向递推,"绝对"困难

第(I)问枚举 a_4 的可能值; 第(II)问证明若有最大值则必含 0; 第(III)问用反证法证明正项数列无上界: 假设存在上界 M , 可导出相邻一大一小两项, 递推三步后大项增加 2 times 小项, 不断重复终将超过 M , 矛盾。

2026年4月26日 · 高考数学 · 数列

(本小题共 15 分) 已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足

$a_n = \max\{a_{n+1}, a_{n+2}\} - \min\{a_{n+1}, a_{n+2}\} \ (n = 1, 2, 3, \dots)$, 其中 $\max\{x, y\}$ 表示 x, y 中最大的数, $\min\{x, y\}$ 表示 x, y 中最小的数。

(I) 当 $a_1 = 1, a_2 = 2$ 时, 写出 a_4 的所有可能值。

(II) 若数列 $\{a_n\}$ 中的项存在最大值, 证明: 0 为数列 $\{a_n\}$ 中的项。

(III) 若 $a_n > 0 \ (n = 1, 2, 3, \dots)$, 是否存在正实数 M , 使得对任意的正整数 n , 都有 $a_n \leq M$? 如果存在, 写出一个满足条件的 M ; 如果不存在, 说明理由。

(I)(II)比较简单,请读者自证.

原递推等价于 $a_n = |a_{n+1} - a_{n+2}|$, 可见从后(下标大的项)往前推是唯一的, 从前(下标小的项)往后推是困难的. 我们"倒着"思考.

从极限的角度分析, 数列大概总体趋势递增, 其中一定会有一些项趋于 M , 另一些项趋于 0. 否则如果都趋于 M , 会导致 $a_n = |a_{n+1} - a_{n+2}|$ 矛盾. 我们把这一点作为(III)书写的抓手.

$$a_{n+2} = a_{n+1} \pm a_n$$

(III)不存在. 假设存在这样的 M , 不妨设 M 为最紧的上界:

首先, $\forall a_k < M$, 否则若 $a_k = M, \max\{a_{k+1}, a_{k+2}\} > M$, 矛盾.

$\exists a_N = M - m, m < \frac{M}{2}$.

下面说明必然有前后两项, 前项不小于 $M-m$, 后项不大于 m .

对 a_{N+1} 分类:

1. $a_{N+1} \in [m, M - m]$, 则若 $a_{N+2} = a_{N+1} - a_N \leq 0$, 导致矛盾. 若 $a_{N+2} = a_{N+1} + a_N \geq M$, 这导致矛盾
2. $a_{N+1} \in (M - m, M)$, 若 $a_{N+2} = a_{N+1} + a_N > 2M - 2m > M$, 矛盾. 若 $a_{N+2} = a_{N+1} - a_N$, 则 $a_{N+2} < m$. 此时选取 a_{N+1}, a_{N+2}
3. $a_{N+1} \in (0, m)$, 此时选取 a_N, a_{N+1}

设选取的两项为 $a_t \geq M - m, a_{t+1} \leq m < a_t(i)$, 向后递推.

一定有 $a_{t+2} = a_{t+1} + a_t$, 否则一定有 $a_{t+2} = a_{t+1} - a_t < 0$, 导致矛盾.

下面根据 a_{t+3} 进行分类:

1. $a_{t+3} = a_{t+2} - a_{t+1} = a_t$, 若 $a_{t+4} = a_{t+3} + a_{t+2}$, 则
 $a_{t+4} = 2a_t + a_{t+1} > 2a_t \geq 2(M - m) > M$, 矛盾; 若
 $a_{t+4} = a_{t+3} - a_{t+2} = a_t - (a_{t+1} + a_t) = -a_{t+1} < 0$, 同样矛盾
2. $a_{t+3} = a_{t+2} + a_{t+1}$, 若 $a_{t+4} = a_{t+3} + a_{t+2}$, 则 $a_{t+4} = 2a_{t+2} + a_{t+1} > 2a_t \geq 2(M - m) > M$, 这导致矛盾; 若 $a_{t+4} = a_{t+3} - a_{t+2} = a_{t+1}$, 则 a_{t+3}, a_{t+4} 又回到了情况 i, 即 $a_{t+5} = a_{t+3} + a_{t+4}$ 且 $a_{t+4} = a_{t+1}$.

那我们可以得到:

1. $a_{t+1} = a_{t+4} = a_{t+7} = \dots = a_{t+3k+1}$
2. $a_{t+2} = a_t + a_{t+1}, a_{t+5} = a_{t+3} + a_{t+4}, \dots, a_{t+3k+2} = a_{3k} + a_{3k+1}$
3. $a_{t+3k+1} = a_{t+3k} + a_{t+3k-1}$

以此类推, $a_{t+3k} = a_t + 2ka_{t+1} (n \in N^*)$, 只要取足够大的 k , 就可以让 $a_{t+3k} > M$, 导出矛盾.

Q.E.D

(III) 解答 (DeepSeek整理)

假设存在正实数 M 使得对所有 n 有 $a_n \leq M$.

由于所有项为正, 设 M 为最小上界 (上确界), 则 $M > 0$ 且每项均小于 M (否则若某项等于 M , 由(II)知会出现 0, 矛盾)。

取 $0 < m < M/2$, 由上确界定义, 存在 N 使 $a_N > M - m$ 。

对 a_{N+1} 分类:

- 若 $a_{N+1} \in [m, M - m]$, 则由 $a_N > M - m \geq a_{N+1}$ 得
 $a_{N+2} = a_{N+1} \pm a_N$: 取 “-” 得 $a_{N+2} \leq 0$, 取 “+” 得 $a_{N+2} \geq M$, 均矛盾。
- 若 $a_{N+1} \in (M - m, M)$, 则 “+” 给出 $a_{N+2} > 2(M - m) > M$, 矛盾; 只能取 “-” 得
 $0 < a_{N+2} < m$ 。此时令 $t = N + 1$ 。
- 若 $a_{N+1} \in (0, m)$, 则令 $t = N$ 。

于是存在相邻两项 $a_t \geq M - m, a_{t+1} \leq m$ 且 $a_t > a_{t+1}$ 。

递推分析:

数列从 a_t 起, 每三项呈现出 "大小大" 的趋势:

由 $a_t = |a_{t+1} - a_{t+2}|$ 及 $a_t > a_{t+1}$, 必有 $a_{t+2} = a_t + a_{t+1}$ 。

再由 $a_{t+1} = |a_{t+2} - a_{t+3}|$ 得两种可能:

- $a_{t+3} = a_{t+2} + a_{t+1} = a_t + 2a_{t+1}$

$$\bullet a_{t+3} = a_{t+2} - a_{t+1} = a_t$$

若取 $a_{t+3} = a_t$, 则下一步由 $a_{t+2} = |a_{t+3} - a_{t+4}|$ 得

$a_{t+4} = a_{t+3} + a_{t+2} = 2a_t + a_{t+1} > M$ (矛盾) 或 $a_{t+4} = a_{t+3} - a_{t+2} = -a_{t+1} < 0$ (矛盾)。因此只能取 $a_{t+3} = a_t + 2a_{t+1}$ 。

接下来由 $a_{t+2} = |a_{t+3} - a_{t+4}|$ 得:

$$\bullet a_{t+4} = a_{t+3} + a_{t+2} = 2a_t + 3a_{t+1} > M \text{ (矛盾)}$$

$$\bullet a_{t+4} = a_{t+3} - a_{t+2} = a_{t+1}$$

取 $a_{t+4} = a_{t+1}$, 又回到小数 a_{t+1} , 且新的大数为 $a_{t+3} = a_t + 2a_{t+1}$ 。

重复上述过程, 每三步大数增加 $2a_{t+1}$, 即:

$$a_{t+3k} = a_t + 2ka_{t+1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

取 $k > \frac{M - a_t}{2a_{t+1}}$, 则 $a_{t+3k} > M$, 与上界 M 矛盾。

故假设不成立, 即不存在这样的 M 。

不可视之物 (标答)

非常克苏鲁的证明方法: (III) 【解】不存在正实数 M , 使得对任意的正整数 n , 都有 $a_n \leq M$ 。理由如下。因为 $a_n > 0 (n \in \mathbf{N}^*)$, 所以 $a_n \neq a_{n+1} (n = 2, 3, \dots)$ 。设集合 $S = \{n \mid a_n > a_{n+1}, n \geq 1\}$ 。(1)若

$S = \{n \mid a_n > a_{n+1}, n \geq 1\} = \emptyset$, 则 $a_1 \leq a_2, a_i < a_{i+1} (i = 2, 3, \dots)$ 。对任意 $M > 0$, 取

$n_1 = \left[\frac{M}{a_1} \right] + 2$ (其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数), 则当 $n > n_1$ 时,

$$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_3 - a_2) + a_2 = a_{n-2} + a_{n-3} + \dots + a_1 + a_2 \geq (n-1)a_1 > M$$

(2)若 $S = \{n \mid a_n > a_{n+1}, n \geq 1\} \neq \emptyset$, 且 S 为有限集, 设 $m = \max\{n \mid a_n > a_{n+1}, n \geq 1\}$, 则

$a_{m+i} < a_{m+i+1} (i = 1, 2, \dots)$ 。对任意 $M > 0$, 取 $n_2 = \left[\frac{M}{a_{m+1}} \right] + m + 1$ (其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最

大整数), 则当 $n > n_2$ 时,

$$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_{m+2} - a_{m+1}) + a_{m+1} = a_{n-2} + a_{n-3} + \dots + a_m + a_{m+1} > M$$

(3)若 $S = \{n \mid a_n > a_{n+1}, n \geq 1\} \neq \emptyset$, 且 S 为无限集, 设

$p_1 = \min\{n \mid a_n > a_{n+1}, n \geq 1\}, p_{i+1} = \min\{n \mid a_n > a_{n+1}, n > p_i\} (i = 1, 2, \dots)$ 。若

$p_{i+1} - p_i = 1$, 则 $a_{p_i} > a_{p_i+1} > a_{p_i+2}$ 。又 $a_{p_i} < \max(a_{p_i+1}, a_{p_i+2})$, 矛盾。所以

$p_{i+1} - p_i \geq 2 (i = 1, 2, \dots)$ 。记 $m_i = a_{p_i+1} (i = 1, 2, \dots)$ 。当 $p_{i+1} - p_i = 2$ 时,

$a_{p_i} > a_{p_i+1}, a_{p_i+1} < a_{p_i+2}, a_{p_i+2} > a_{p_i+3}$ 。因为 $a_{p_i+1} = a_{p_i+2} - a_{p_i+3}$, 所以

$m_{i+1} = a_{p_{i+1}+1} = a_{p_i+2} - a_{p_i+1} = a_{p_i} > a_{p_i+1} = m_i$ 。当 $p_{i+1} - p_i \geq 3$ 时,

$a_{p_i} > a_{p_i+1}, a_{p_i+1} < a_{p_i+2} < \dots < a_{p_{i+1}}, a_{p_{i+1}} > a_{p_{i+1}+1}$ 。因为 $a_{p_{i+1}-1} = a_{p_{i+1}} - a_{p_{i+1}+1}$, 所以

$m_{i+1} = a_{p_{i+1}+1} = a_{p_{i+1}} - a_{p_{i+1}-1} = a_{p_{i+1}-2} \geq a_{p_i+1} = m_i$ 。所以 $m_i \leq m_{i+1} (i = 1, 2, \dots)$ 。因为

$a_{p_{i+1}} = a_{p_{i+1}+2} - a_{p_{i+1}+1}$, 所以

$a_{p_{i+1}+2} = a_{p_{i+1}} + a_{p_{i+1}+1} = a_{p_{i+1}} + m_{i+1} \geq a_{p_i+1} + m_1 \geq a_{p_i+2} + m_1 (i = 1, 2, \dots)$ 。所以

$a_{p_{i+1}+2} - a_{p_i+2} \geq m_1 (i = 1, 2, \dots)$, 且 $a_{p_1+2} > a_{p_1+1} = m_1$ 。对任意 $M > 0$, 取 $n_3 = \left\lceil \frac{M}{m_1} \right\rceil + 1$

(其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数), 则当 $k > n_3$ 时,

$$a_{p_k+2} = (a_{p_k+2} - a_{p_{k-1}+2}) + (a_{p_{k-1}+2} - a_{p_{k-2}+2}) + \cdots + (a_{p_2+2} - a_{p_1+2}) + a_{p_1+2} \geq (k-1)m_1 + a_{p_1+2} > km_1$$

综上, 不存在正实数 M , 使得对任意的正整数 n , 都有 $a_n \leq M$ 。