

Hermite-Hadamard不等式

2026年4月25日 · draft

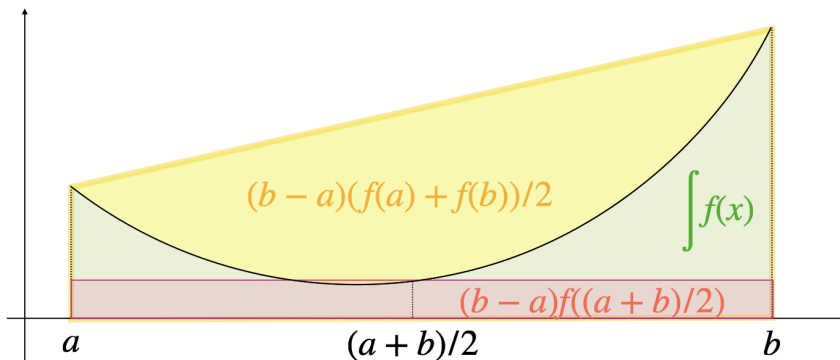
引入(Hermite-Hadamard)

对于凸函数,可以利用其几何特征(面积)推导出Hermite-Hadamard不等式(下文统一称为H-H不等式).

Hermite-Hadamard inequality

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ convex

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$



P1

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (b \geq a)$$

如P-1所示,对于凸函数 $f(x)$,可以做以下对应:

Hermite-Hadamard 不等式几何对应关系表

不等式组成部分	图中对应的面积区域	几何意义说明
左侧项: $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$	红色半透明矩形 (底为 $b-a$, 高为 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$)	中点矩形面积: 代表在中点处作切线所围成的梯形面积(想一想为什么)。由于函数是凸的,切线完全位于曲线下方,因此该矩形面积最小。

不等式组成部分	图中对应的面积区域	几何意义说明
中间项： $\int_a^b f(x)dx$	绿色填充区域 (曲线 $f(x)$ 下方的面积)	积分平均值：代表曲线下的实际面积。在图中，绿色区域覆盖了红色矩形，但被最外层的黄色梯形所包含。
右侧项： $(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$	整个黄色阴影梯形 (连接 $(a, f(a))$ 与 $(b, f(b))$ 的割线下方)	割线梯形面积：代表连接区间端点的割线（弦）与 x 轴围成的面积。由于凸函数的割线位于曲线之上，其面积最大。

我们下面证明这个不等式:

$$(b-a)f(\frac{a+b}{2}) \leq \int_a^b f(x)dx$$

设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$, $g(x) = (x-a)f(\frac{x+a}{2}) - (F(x) - F(a))(x \geq a)$

$$g'(x) = f(\frac{x+a}{2}) + \frac{x-a}{2}f'(\frac{x+a}{2}) - f(x)$$

$$g''(x) = f'(\frac{x+a}{2}) + \frac{x-a}{4}f''(\frac{x+a}{2}) - f'(x)$$

因为 $f(x)$ 为凸函数, $f''(x+a) > 0, f'(\frac{x+a}{2}) \geq f'(x)$,所以 $g''(x) \geq 0$.

又 $g'(a) = 0 \leq g'(x)$,故 $g(x) \geq g(a) = 0$