

取余递推

6. 已知实数 $x_0 \in [0, 1)$ ，数列 $\{x_n\}$ 满足对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ，有 $x_n = \begin{cases} 2x_{n-1}, & x_{n-1} < \frac{1}{2}, \\ 2x_{n-1} - 1, & x_{n-1} \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$ 若 $x_{2021} = x_0$ ，则所有可能的 x_0 的个数为 $\quad$ 。A、2021

2026年10月11日

6. 已知实数 $x_0 \in [0, 1)$ ，数列 $\{x_n\}$ 满足对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ，有

$$x_n = \begin{cases} 2x_{n-1}, & x_{n-1} < \frac{1}{2}, \\ 2x_{n-1} - 1, & x_{n-1} \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

若 $x_{2021} = x_0$ ，则所有可能的 x_0 的个数为 $\quad$ 。

A、2021 B、 $2^{2021} - 1$ C、 2^{2021} D、以上答案都不对

解：记 $\{x\} = x - [x]$ 为 x 的小数部分。

我们先对问题进行粗略审视：

$$x \in [0, \frac{1}{2}) \Rightarrow 2x \in [0, 1), \quad x \in [\frac{1}{2}, 1) \Rightarrow 2x - 1 \in [0, 1).$$

由 $x_0 \in [0, 1)$ 归纳易知， $x_n \in [0, 1)$ ($n = 1, 2, \dots$)。

于是 $2x_{n-1} \in [0, 2)$ ：当 $2x_{n-1} < 1$ 时， $x_n = 2x_{n-1}$ ；当 $2x_{n-1} \geq 1$ 时， $x_n = 2x_{n-1} - 1$ 。两种情形都是取 $2x_{n-1}$ 的小数部分，所以题目中的递推公式其实恰是

$$x_n = \{2x_{n-1}\}.$$

我们又熟知取余函数的性质：若 $a \in \mathbf{Z}$ ，则

$$\{a\{b\}\} = \{ab\},$$

这是因为 $ab - a\{b\} = a[b] \in \mathbf{Z}$ ，而相差整数的两个数小数部分相同。

那么，由归纳法即得通项公式：

$$x_n = \{2x_{n-1}\} = \{2\{2^{n-1}x_0\}\} = \{2^n x_0\}.$$

要求 $x_{2021} = x_0$, 即 $\{2^{2021}x_0\} = x_0$. 由于 $x_0 \in [0, 1)$, 这等价于 $2^{2021}x_0 - x_0$ 是整数, 即

$$2^{2021}x_0 = x_0 + C, \quad C = (2^{2021} - 1)x_0 \in \mathbf{Z}.$$

又 $x_0 \in [0, 1)$, 故 $C \in [0, 2^{2021} - 1)$, 即 $C \in \{0, 1, \dots, 2^{2021} - 2\}$.

反之, 对于每一个这样的整数 C , 令 $x_0 = \frac{C}{2^{2021} - 1}$, 则 $x_0 \in [0, 1)$, 且 $2^{2021}x_0 - x_0 = C \in \mathbf{Z}$, 满足条件; 不同的 C 对应不同的 x_0 .

而这样的 C 一共有 $2^{2021} - 1$ 个, 故有 $2^{2021} - 1$ 个 x_0 .

正确答案: B.

例 8 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 \in \mathbf{N}^*$, $a_1 \leq 36$, 且

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & a_n \leq 18, \\ 2a_n - 36, & a_n > 18 \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

记集合 $M = \{a_n \mid n \in \mathbf{N}^*\}$.

- (1) 若 $a_1 = 6$, 写出集合 M 的所有元素;
 - (2) 若集合 M 存在一个元素是 3 的倍数, 证明: M 的所有元素都是 3 的倍数;
 - (3) 求集合 M 的元素个数的最大值. **解:** (1) 6, 12, 24.
- (2) 因为集合 M 存在一个元素是 3 的倍数, 所以不妨设 a_k 是 3 的倍数.

由

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & a_n \leq 18, \\ 2a_n - 36, & a_n > 18 \end{cases}$$

可归纳证明对任意 $n \geq k$, a_n 是 3 的倍数.

如果 $k = 1$, 则 M 的所有元素都是 3 的倍数.

如果 $k > 1$, 因为 $a_k = 2a_{k-1}$ 或 $a_k = 2a_{k-1} - 36$, 所以 $2a_{k-1}$ 是 3 的倍数, 于是 a_{k-1} 是 3 的倍数.

类似可得, $a_{k-2}, \dots, a_1$ 都是 3 的倍数.

从而对任意 $n \geq 1$, a_n 是 3 的倍数, 因此 M 的所有元素都是 3 的倍数.

综上, 若集合 M 存在一个元素是 3 的倍数, 则 M 的所有元素都是 3 的倍数. (3) 先归纳证明 $a_n \in \{1, 2, \dots, 36\}$: 若 $a_n \leq 18$, 则 $a_{n+1} = 2a_n \in [2, 36]$; 若 $a_n > 18$, 则 $a_{n+1} = 2a_n - 36 \in [2, 36]$.

又无论哪种情形, $a_{n+1} - 2a_n$ 都是 36 的倍数, 即

$$a_{n+1} \equiv 2a_n \pmod{36}, \quad a_n \equiv 2^{n-1}a_1 \pmod{36}.$$

而 $1, 2, \dots, 36$ 模 36 两两不同余, 所以只要 $a_m \equiv a_n \pmod{36}$, 就有 $a_m = a_n$.

由于 $36 = 4 \times 9$, $2^6 = 64 \equiv 1 \pmod{9}$, 当 $n \geq 3$ 时 $4 \mid 2^{n-1}$, 故

$$a_{n+6} - a_n \equiv 2^{n-1}(2^6 - 1)a_1 = 2^{n-1} \cdot 63a_1 \equiv 0 \pmod{36},$$

即当 $n \geq 3$ 时 $a_{n+6} = a_n$, 所以 $M = \{a_1, a_2, \dots, a_8\}$, $|M| \leq 8$.

取 $a_1 = 1$, 得 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 28, 20, 4, \dots$, 前 8 项互不相同, $|M| = 8$.

故集合 M 的元素个数的最大值为 8.

方法总结

1. 识别结构. 两道题的递推都是分段的, 但每一段的斜率相同 (都乘 2), 只是为了留在某个范围内减去一个常数. 这类递推本质上是“乘 2 再取余”:

- 实数情形 (第 6 题): $x_{n+1} = \{2x_n\}$, 于是 $x_n = \{2^n x_0\}$;
- 整数情形 (例 8): $a_{n+1} \equiv 2a_n \pmod{36}$, 于是 $a_n \equiv 2^{n-1}a_1 \pmod{36}$.

分段递推一旦写成取余的形式, 就有了通项, 周期问题也就变成了数论问题.

2. 用分母 (模数) 求周期. 若 x_0 是分母为 $2^s \cdot m$ (m 为奇数) 的分数, 则 $x_n = \{2^n x_0\}$ 先经过至多 s 项的“预周期”, 之后以 2 模 m 的阶为周期循环. 例 8 中 $36 = 2^2 \times 9$, 预周期为 2, 周期为 6

($2^6 \equiv 1 \pmod{9}$), 所以最多 $2 + 6 = 8$ 个不同的值. 抽屉原理只能说明循环存在, 求不出循环从哪里开始、有多长; 要计数, 就要看分母.

3. 二进制视角. 把 x_0 写成二进制小数 $0.d_1d_2d_3\dots$, 乘 2 取小数部分就是把各位数字左移一位. 第 6 题中 $x_{2021} = x_0$ 等价于二进制小数以 2021 为周期, 循环节有 2^{2021} 种, 去掉全为 1 的那一种 (对应 $x_0 = 1 \notin [0, 1)$), 共 $2^{2021} - 1$ 个, 与前面的结果一致, 可作验算.

4. 书写要点.

- 整数数列直接写模 36 的同余式即可, 不必换元成小数; 同时说明各项落在一个完全剩余系中, 同余才能推出相等.
- 用到 $\{a\{b\}\} = \{ab\}$ ($a \in \mathbf{Z}$) 时要说明 a 为整数.

- 计数时充要性都要说明：第 6 题中每个整数 $C \in [0, 2^{2021} - 1)$ 给出的 $x_0 = \frac{C}{2^{2021} - 1}$ 都满足条件，且不同的 C 对应不同的 x_0 .