

圆锥曲线的焦半径公式

圆锥曲线的焦点弦长是题目常常设问之处,本文用 直线参数方程 推导了: - 椭圆 - 双曲线 - 抛物线 的 焦点弦长公式

2026年5月10日 · 高考数学 · 圆锥曲线

圆锥曲线的焦点弦长是题目常常设问之处,本文用**直线参数方程**推导了:

- 椭圆
- 双曲线
- 抛物线

的**焦点弦长公式**

直线的参数方程

过点 $P(x_0, y_0)$ 的直线可表示为:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cos(\theta), \\ y = y_0 + t \sin(\theta) \end{cases}$$

字母	含义
θ	直线的倾斜角
t	有向距离

公式推导

一般地,把直线的参数方程与圆锥曲线联立,会得到一个关于 t 一元二次方程,两根为 t_1, t_2 .

直线被圆锥曲线所截的长度,始终为 $|t_1 - t_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

椭圆

对于椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,右焦点 $F(c, 0)$,设过右焦点的焦点弦倾斜角为 θ .

$$\begin{cases} x = c + t \cos(\theta), \\ y = t \sin(\theta), \\ b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \end{cases}$$

$$\text{联立得: } (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) t^2 + (2b^2 c \cos \theta) t + b^2 (c^2 - a^2) = 0$$

这个结果的正确性可以由量纲检验(把a,b,c,t看成长度,左右长度的幂次均为4)

$$\text{判别式 } \Delta = 4a^2 b^4$$

$$\text{焦点弦长: } |t_1 - t_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta|}$$

$$\frac{2ab^2}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} = \frac{2ab^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \theta}$$

这个结果是经得起审视的:如果椭圆退化成圆($e = 1$),则 $c = 0$,焦点(此时退化为原点)弦恒长 $2a = 2b$

如果换成左焦点,相当于 $\theta \rightarrow \pi - \theta$,公式保持不变.

更加细致地,可以算出焦点弦在x轴上下方的长度.

$$\begin{cases} |t_1| = \frac{b^2}{a+c \cos \theta}, \\ |t_2| = \frac{b^2}{a-c \cos \theta}, \\ |t_1 t_2| = \frac{b^4}{a^2 - c^2 \cos^2 \theta} \end{cases}$$

双曲线

对于双曲线 $H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,右焦点 $F(c, 0)$,设过右焦点的焦点弦倾斜角为 θ ,斜率为 k .

$$\begin{cases} x = c + t \cos(\theta), \\ y = t \sin(\theta), \\ b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \end{cases}$$

$$\text{联立得: } (-a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) t^2 + (2b^2 c \cos \theta) t + b^2 (c^2 - a^2) = 0$$

$$\text{判别式 } \Delta = 4a^2 b^4$$

$$\text{焦点弦长: } |t_1 - t_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|-a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta|}$$

到此为止,与椭圆焦点弦长的推导一致,此后便出现分歧.

$T = -a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta = c^2 \cos^2 \theta - a^2$ 的正负与 θ 密切相关.

事实上,如果:

- $|k| = |\tan \theta| > \frac{b}{a}$, 则 $T < 0$, 直线与双曲线交于右支.
- $|k| = |\tan \theta| < \frac{b}{a}$, 则 $T > 0$, 直线与双曲线交于左右支.
- $|k| = |\tan \theta| = \frac{b}{a}$, 则 $T = 0$, 直线与双曲线交于右支一点和无穷远点, 焦点弦无限长

$$\frac{2ab^2}{|-a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta|} = \frac{2ab^2}{|a^2 - c^2 \cos^2 \theta|}$$

左焦点的情况与公式完全相同, 不加赘述.

同样计算 t_1, t_2

$$\begin{cases} |t_1| = \frac{b^2}{a+c \cos \theta}, \\ |t_2| = \frac{b^2}{|a-c \cos \theta|}, \\ |t_1 t_2| = \frac{b^4}{|a^2 - c^2 \cos^2 \theta|} \end{cases}$$

抛物线

设抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$, 焦点 $F(\frac{p}{2}, 0)$, 焦点弦倾斜角 θ .

$$\begin{cases} x = \frac{p}{2} + t \cos(\theta), \\ y = t \sin(\theta), \\ y^2 = 2px \end{cases}$$

联立得: $t^2 \sin^2 \theta - 2pt \cos \theta - p^2 = 0$

判别式 $\Delta = 4p^2$

焦点弦长: $|t_1 - t_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sin^2 \theta}$

$$\frac{2p}{\sin^2 \theta}$$

$$\begin{cases} |t_1| = \frac{p(1+\cos \theta)}{\sin^2 \theta}, \\ |t_2| = \frac{p(1-\cos \theta)}{\sin^2 \theta}, \\ |t_1 t_2| = \frac{p^2}{\sin^2 \theta} \end{cases}$$

小试牛刀

焦点弦公式形式简洁统一,易于记忆,可以加快解题速度(以下只呈现与焦点弦相关的核心步骤).

例1

(2025重庆预赛)已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , A, B 分别是 E 的左支和右支上的点,若 F_1, A, B 三点共线,且 $\angle AF_1F_2 = 30^\circ, |F_2A| = |F_2B|$,则双曲线的离心率 $e = \underline{\hspace{2cm}}$

题目条件等价于 $AB = 4a, \theta = 30^\circ$ 且 $-a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta > 0$,由双曲线焦点弦长公式

$$\frac{2ab^2}{-a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} = \frac{8ab^2}{-a^2 + 3b^2} = 4a$$

得出 $a = b, e = 1$.

例2

(2025广州预赛)已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左,右焦点分别为 F_1, F_2 ,过 F_2 的直线 l 与 C 的右支交于 A, B 两点.若 $\triangle AF_1B$ 的外接圆被 x 轴截得的弦长为7,则 $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$.

易知 $\triangle AF_1B$ 的外接圆与 x 轴交于 F_1 ,设另一个交点为 D ,可算得 $F_2D = 7 - |F_1F_2| = 3$.

考虑用圆幂定理:

$$|t_1 t_2| = |F_1 F_2| |F_2 D|$$

$$\frac{b^4}{a^2 - c^2 \cos^2 \theta} = \frac{9}{1 - 4 \cos^2 \theta} = 4 \times 3 = 12$$

于是 $\cos^2 \theta = \frac{1}{16}$,用焦点弦公式得:

$$|AB| = \frac{2ab^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \theta} = \frac{2 \times 1 \times 3}{1 - 4 \times \frac{1}{16}} = 8$$

例3

已知双曲线 $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1$ 的左,右焦点分别为 F_1, F_2 .

设过 F_2 的直线 l 与 C 的左,右两支分别交于 A, B 两点,且 $|AF_1| = |BF_1|$,证明: $|AF_2|, |AB|, |BF_2|$ 成等比数列.

由例1知, $|AB| = 4a = 4$,设直线 l 的倾斜角为 θ ,则:

$$|AB| = \frac{2ab^2}{-a^2 + c^2 \cos^2 \theta} = \frac{16}{9 \cos^2 \theta - 1} = 4$$

解得: $\cos^2 \theta = \frac{5}{9}$.

更进一步, $|AF_2||BF_2| = \frac{b^4}{c^2 \cos^2 \theta - a^2} = \frac{64}{5-1} = 16 = |AB|^2$

由此, 不难得出:

$$|AF_2|, |AB|, |BF_2| \text{ 成等比数列} \leftrightarrow 5a^2 = c^2 \cos^2 \theta$$

例4

设 F 为椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的右焦点, 过点 F 分别作倾斜角为 30° 和 60° 的直线 l_1, l_2 , 分别与椭圆 Γ 交于 A, B, C, D 四个点, 则这四个点构成的凸四边形的面积为 _____. (李纪琛供题)

$$|AB| = \frac{2ab^2}{a^2 - c^2 \cos^2 30^\circ} = \frac{4}{4 - \frac{9}{4}} = \frac{16}{7},$$

$$|CD| = \frac{2ab^2}{a^2 - c^2 \cos^2 60^\circ} = \frac{4}{4 - \frac{3}{4}} = \frac{16}{13}$$

$$S = \frac{1}{2} |AB| |CD| \sin 30^\circ = \frac{64}{91}$$

例5

(2022浙江预赛) 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 2\sqrt{6})$ 的右焦点 F_1 , 与抛物线 $C_2: y^2 = 4px (p \in \mathbb{N}^+)$ 的焦点重合. 过 F_1 且斜率为正整数的直线 l 交 C_1 于 A, B , 交 C_2 于 C, D . 若 $13|AB| = \sqrt{6}|CD|$, 求 b, p 的值.

$$c^2 = 24 - b^2 = p^2$$

设 l 的斜率为 $k \in \mathbb{N}^+$, 则:

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{k^2 + 1}, \sin^2 \theta = \frac{k^2}{k^2 + 1}$$

$$13 \frac{4\sqrt{6}b^2}{24 - (24 - b^2) \frac{1}{k^2 + 1}} = \sqrt{6} \frac{4p}{\frac{k^2}{k^2 + 1}}$$

$$13b^2 k^2 = 2p(24k^2 + b^2)$$

$$13k^2(24 - p^2) = 2p(24k^2 - p^2 + 24)$$

由 $24 - p^2 > 0, p = 1, 2, 3, 4$

经检验,只有 $p = 4, b = 2\sqrt{2}$ 满足题意.