

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ の因式分解

详细推导 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ 的因式分解及应用

2026年4月11日 · 数学强基 · 高联一试

常用结论

我们由一个寻常的三元三次对称式出发:

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \end{aligned}$$

其实还有一个比较神奇的证明方法:

设 a, b, c 为一元三次方程 $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc = 0$ 的三个根.

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)(a + b + c) + 3abc \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \end{aligned}$$

这种证明方法和**牛顿恒等式**完全一致(挖个坑,以后写).

总之,如果 $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ (*), 当且仅当 $a + b + c = 0$ 或 $a = b = c$.

反之,若 $a + b + c = 0$, 则 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

那么我们容易知道, $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$

这里挖个坑,以后用叶军老师书中**三元三次不等式的通法**再次解释.

实战应用

实际上, (*) 在各高校的强基考试中屡屡出现:

例一

(2020清华强基)已知实数 a, b 满足 $a^3 + b^3 + 3ab = 1$,则 $a + b$ 的所有可能值组成的集合为 M ,则()

- A. M 为单元素集 B. M 为有限集,但不是单元素集
C. M 为无限集,且有下界 D. M 为无限集,且无下界

显然 $a^3 + b^3 + (-1)^3 - 3ab(-1) = 0$,只能有 $a = b = -1$ 或 $a + b + (-1) = 0$,所以:

$$M = \{-1, 2\}, \text{选B}$$

例二

(2014北大综合营)设实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0, a^3 + b^3 + c^3 = 0$,其中 $n \in N_+$,求 $a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}$ 的值

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc + \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] = 3abc = 0, \text{所以:}$$

$abc = 0$,不妨设 $c = 0, a + b = 0$,则所求式显然等于0.

例三

(2016北大自招)已知对于实数 a ,存在实数 b, c 满足 $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc, a^2 = 2(b + c)$,则这样的实数 a 的个数为()

- A.1 B.3 C.无穷个 D.前三个选项都不对

由※有 $a - b - c = 0$ 或 $a = -b = -c$,下面对两个情况进行分类讨论:

情况一: $a=b+c$

$$a^2 = 2a, \text{于是} a \text{ 可以为 } 0 \text{ 或 } 2$$

情况二: $b=c=-a$

$$a^2 = -4a \geq 0, \text{于是} a = -4$$

综上,选B

例四

(2019清华领军)设实数 x, y 满足 $x^3 + 27y^3 + 9xy = 1$,则()

A. x^3y 的最大值为 $\frac{1}{3}$ B. x^3y 的最大值为 $\frac{27}{64}$

C. x^3y 的最小值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. x^3y 无最小值

$$x^3 + (3y)^3 + (-1)^3 - 3x(3y)(-1) = 0, \text{推出 } x + 3y - 1 = 0 \text{ 或 } x = 3y = -1$$

情况一: $x=3y=-1$

$$x = -1, y = -\frac{1}{3}, x^3y = \frac{1}{3}$$

情况二: $x+3y=1$

$$x^3(3y) = x^3(1-x), \text{显然无最小值.}$$

不妨设最大值大于0, 则 $x, (1-x)$ 同号, $x \in (0, 1)$.

$$9x^3y = 3x^3(3y) = x^3(3-3x) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

$$x^3y \leq \frac{9}{256} < \frac{1}{3}$$

综上, 选AD.

例5

(2021北大寒假学堂) 设正整数 m, n 满足 $m^3 + n^3 + 99mn = 33^3$, 则数对 (m, n) 有 $()$ 组.

$$m^3 + n^3 + (-33)^3 - 3mn(-33) = 0$$

情况一: $m=n=-33$

与正整数的条件矛盾

情况二: $m+n=33$

$(m, n) | m, n \in N^+, m+n=33 = (1, 32), (2, 31), \dots, (32, 1)$, 共32组.

看惯了以(*)为条件的题目, 让"攻守之势易也"吧.

例6

(知乎网友) a, b, c 为非负实数, $a + b + c = 1$, 求证: $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq \frac{2}{9}$

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc = 6abc + (a + b + c)(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 6abc + a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

这里不能把 $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ 放缩为 0, 否则放缩过度.

abc 在不等号较大的一边, 且原式关于 a, b, c 对称, 我们考虑使用 **SPQ 法+舒尔不等式**.

设 $s = a + b + c, q = ab + bc + ca, p = abc$, 则 **Schur**: $s^3 - 4sq + 9p \geq 0, 9p \geq 4q - 1$

$$6abc + a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = 6p + s^2 - 3q = 6p - 3q + 1 \geq -\frac{1}{3}(q - 1) \geq \frac{2}{9}$$

这相当于 $q \leq \frac{1}{3}$, 由 AM-GM 不等式 $3q \leq s^3 = 1$, Q.E.D

例7

(美国数学竞赛) 求证: 任意三个 **互不相等的质数**, 其立方根 **不可能** 为 **等差数列** 的其中三项.

反证法: 设三个质数为 $p_1 < p_2 < p_3$, 假设 $\frac{\sqrt[3]{p_2} - \sqrt[3]{p_1}}{k} = \frac{\sqrt[3]{p_3} - \sqrt[3]{p_2}}{l}, k, l \in \mathbb{N}^*$, 则:

$$l\sqrt[3]{p_1} - (k + l)\sqrt[3]{p_2} + k\sqrt[3]{p_3} = 0$$

$$(l\sqrt[3]{p_1})^3 + (k\sqrt[3]{p_3})^3 + [-(k + l)(\sqrt[3]{p_2})]^3 = l^3 p_1 + k^3 p_3 - (k + l)^3 p_2 = -3lk(k + l)(\sqrt[3]{p_1})(\sqrt[3]{p_2})(\sqrt[3]{p_3})$$

左边为整数, 故 $\sqrt[3]{p_1 p_2 p_3}$ 必须是有理数 (注意右边系数 $3lk(k + l) \neq 0$)。

但 $\sqrt[3]{p_1 p_2 p_3}$ 是无理数: 若 $\sqrt[3]{p_1 p_2 p_3} = \frac{q}{r}$ ($\gcd(q, r) = 1$), 则 $r^3 p_1 p_2 p_3 = q^3$. 由此 $p_1 \mid q^3$, 因 p_1 为质数故 $p_1 \mid q$, 设 $q = p_1 q'$, 代入得 $r^3 p_2 p_3 = p_1^2 q'^3$, 故 $p_1 \mid r^3$, 进而 $p_1 \mid r$, 与 $\gcd(q, r) = 1$ 矛盾.

Q.E.D

例8

若 $abc \neq 0, a + b + c = 0$, 求 $a(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}) + b(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}) + c(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$.

$$\text{原式} = \frac{a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)}{abc} = -\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = -3$$

一元三次方程

三次方程 [编辑]

文 44种语言 ▼

条目 讨论 汉 汉 大陆简体 ▼

阅读 编辑 查看历史 工具 ▼

维基百科，自由的百科全书

三次方程是未知项总次数最高为3的**整式方程**，**一元三次方程**一般形式为

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

其中 $a, b, c, d (a \neq 0)$ 是属于一个**域**的数字，通常这个域为**ℝ**或**ℂ**。

本条目只解释一元三次方程，而且简称之为三次方程式。

历史 [编辑]

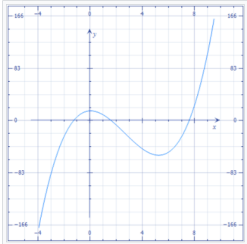
中国**唐朝**数学家**王孝通**在武德九年（626年）前后所著的《**缉古算经**》中建立了25个三次**多项式方程**和提出三次方程实根的数值解法。^[1]

波斯数学家**欧玛尔·海亚姆**（1048年 - 1123年）通过用圆锥截面与圆相交的方法构建了三次方程的解法。他说明了怎样用这种几何方法利用三角表得到数字式的答案。

中国**南宋**的数学家**秦九韶**在他1247年编写的《**数书九章**》一书中提出了**高次方程**的数值解法**秦九韶算法**，提出“商常为正，实常为负，从常为正，益常为负”的原则。

在十六世纪早期，意大利数学家**费罗**找到了能解一种三次方程的方法，也就是形如 $x^3 + mx = n$ 的方程。事实上，如果我们允许 m, n 是复数，所有的三次方程都能变成这种形式，但在那个时候人们不知道复数。

尼科洛·塔尔塔利亚被认为是最早得出三次方程式一般解的人。1553年他在一场数学竞赛中解出所有三次方程式的问题。随后**卡尔丹诺**拜访了塔尔塔利亚请教三次方程式解法并得到了启发。卡尔丹诺注意到塔尔塔利亚的方法有时需要他给复数开平方。他甚至在《**数学大典**》里包括了这些**复数**的计算，但他并不真正理解它。**拉斐尔·邦贝利**（Rafael Bombelli）详细地研究了这个问题，并因此被人们认为是复数的发现者。



三次函数 $y = x^3 - 8x^2 + x + 15$ 的图像。该函数与x轴相交3次说明方程 $x^3 - 8x^2 + x + 15 = 0$ 有3个实数根。

这里引入一元三次方程卡尔丹公式的一种证明: 对于 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$,总可以通过平移与伸缩化为:

$$u^3 + pu + q = 0$$

设 $u + v + w = 0$:

$$u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = 0$$

$$\begin{cases} v^3 + w^3 = q, \\ vw = -\frac{1}{3}p \end{cases}$$

这就相当于:

$$\begin{cases} v^3 + w^3 = q, \\ v^3w^3 = -\frac{1}{27}p^3 \end{cases}$$

也就是 v^3, w^3 是一元二次方程 $t^2 - qt - \frac{1}{27}p^3 = 0$ 的两根.

判别式 $\Delta = q^2 + \frac{4}{27}p^3$

考虑 v, w 的对称性,不妨令:

5 / 7

$$\Delta \geq 0 \begin{cases} v^3 = \frac{q+\sqrt{\Delta}}{2}, \\ w^3 = \frac{q-\sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}$$

$$\Delta < 0 \begin{cases} v^3 = \frac{q+\sqrt{-\Delta}i}{2}, \\ w^3 = \frac{q-\sqrt{-\Delta}i}{2} \end{cases}$$

为了书写方便起见,下面不区分 $\sqrt{-\Delta}$ 和 $\sqrt{\Delta}i$

由棣莫弗公式及 $vw = -\frac{1}{3}p$ 的限制:

$$\begin{cases} v = \sqrt[3]{\frac{q+\sqrt{\Delta}}{2}}, \\ w = \sqrt[3]{\frac{q-\sqrt{\Delta}}{2}} \end{cases} \begin{cases} v = \sqrt[3]{\frac{q+\sqrt{\Delta}}{2}}w, \\ w = \sqrt[3]{\frac{q-\sqrt{\Delta}}{2}}w^{-1} \end{cases} \begin{cases} v = \sqrt[3]{\frac{q+\sqrt{\Delta}}{2}}w^2, \\ w = \sqrt[3]{\frac{q-\sqrt{\Delta}}{2}}w^{-2} \end{cases}$$

$u = -(v + w)$,于是便解出了三个根.

而根据 $\Delta = q^2 + \frac{4}{27}p^3$ 的符号,可以判断根的情况:

$$\begin{cases} \Delta = 0 \text{ 且 } pq \neq 0: & \text{方程有一个两重实根和一个单重实根} \\ \Delta > 0: & \text{方程有一个实根和一对共轭虚根} \\ \Delta < 0: & \text{方程有三个互异实根} \\ pq = 0: & \text{方程有一个三重实根} \end{cases}$$

$\Delta < 0$: 三个实根的情形 ("不可约情形")

直觉上的困惑

当 $\Delta < 0$ 时, $\sqrt{\Delta}$ 是虚数,于是 v, w 的表达式里出现了复数的立方根——**但最终结果却是三个实数**。这正是历史上著名的**不可约情形(casus irreducibilis)**,卡尔达诺本人也对此感到困惑。

用三角方法理解

当 $\Delta < 0$ 时,换一种参数化更直观。此时 $\frac{q + \sqrt{-\Delta}i}{2}$ 是一个复数,写成极坐标形式:

$$\frac{q + \sqrt{-\Delta}i}{2} = re^{i\theta}$$

$$\frac{q - \sqrt{-\Delta}i}{2} = re^{-i\theta}$$

其中

$$r = \sqrt{\frac{q^2 - |\Delta|}{4}} = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \quad \theta = \arctan \frac{\sqrt{-\Delta}}{q}$$

($\Delta < 0$ 时 $p < 0$, 故 r 是实数。)

$u_k = -r^{1/3} e^{i(\theta+2k\pi)/3} + r^{1/3} e^{i(-\theta+2k\pi)/3}$, $k = 0, 1, 2$, 对应三个根:

$$u_k = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\right) - \frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

三个根全部是实数, 因为复数部分在 $v + w$ 相加时恰好相消。

为什么复数会消失?

关键在于 $vw = -p/3$ 是实数约束。 v 和 w 互为共轭复数:

$$v = r^{1/3} e^{i\theta/3}, \quad w = \bar{v} = r^{1/3} e^{-i\theta/3}$$

所以

$$u = -(v + w) = -2r^{1/3} \cos \frac{\theta}{3} \in \mathbb{R}$$

另外两个根对应 θ 替换为 $\theta + 2\pi$ 、 $\theta + 4\pi$, 同样是实数。复数只是计算的"中间语言", 最终虚部两两抵消。

历史意义

不可约情形在历史上证明了一件重要的事: **即使方程的根全是实数, 有时也无法避免在推导过程中经过复数。** 这正是推动复数被数学家认真对待的重要动力之一。

结语(Gemini)

通过上述对 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 这一经典恒等式的推导与实例演练, 我们可以看到它在处理**三元对称式**、**方程根的关系**以及**不等式证明** (如舒尔不等式) 中的核心地位。

无论是强基计划中巧妙的变形求值, 还是数学竞赛中结合数论性质的反证推导, 掌握这一公式的两种形态——**因式分解型**与**配方型**, 往往是破局的关键。希望本文的梳理能帮助你在面对此类高次对称问题时, 做到“心中有公式, 解题有法度”。