

导数小题-01

9. 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1 - a(x-1)$ ($a \in \mathbf{R}$), 则下列四个结论不正确的是 () A. $\forall a < 0, f(x)$ 有极小值 B. $\forall a < 0, f(x)$ 恰有 2 个零点 C. $\exists a > 0$, 使得不等式 $f(x) \geq 0$

2026年10月11日

9. 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1 - a(x-1)$ ($a \in \mathbf{R}$), 则下列四个结论不正确的是 ()

- A. $\forall a < 0, f(x)$ 有极小值
- B. $\forall a < 0, f(x)$ 恰有 2 个零点
- C. $\exists a > 0$, 使得不等式 $f(x) \geq 0$ 恒成立
- D. $\exists a > 0$, 使得关于 x 的方程 $f(x) = 0$ 有 3 个不同的实数解

解: $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f(1) = 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - a = \frac{-ax^2 + x - 1}{x^2}.$$

令 $g(x) = -ax^2 + x - 1$, 则 $f'(x)$ 与 $g(x)$ 同号.

分析选项A: 若 $a < 0$, 则 $g(x)$ 的判别式 $\Delta = 1 - 4a > 1 > 0$, 两根之积 $x_1x_2 = \frac{1}{a} < 0$, 故 $x_1 < 0 < x_2$. 又 $g(x)$ 开口向上, 所以

$x \in (0, x_2)$ 时 $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减; $x \in (x_2, +\infty)$ 时 $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增.

因此 $f(x)$ 有极小值 $f(x_2)$, 选项A正确.

分析选项B: 设 $a < 0$. $g(x)$ 的对称轴 $x = \frac{1}{2a} < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 又 $g(0) = -1 < 0, g(1) = -a > 0$, 所以 $x_2 \in (0, 1)$, 从而

$$f(x_2) < f(1) = 0.$$

在 $(x_2, +\infty)$ 上 $f(x)$ 单调递增, 所以那里只有一个零点 $x = 1$, 且 $f(x) < 0$ 对 $x \in [x_2, 1)$ 成立.

下面在 $(0, x_2)$ 上找一个函数值为正的点. 由 $\ln t \geq 1 - \frac{1}{t}$ (取 $t = \sqrt{x}$) 得

$$\ln x \geq 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right).$$

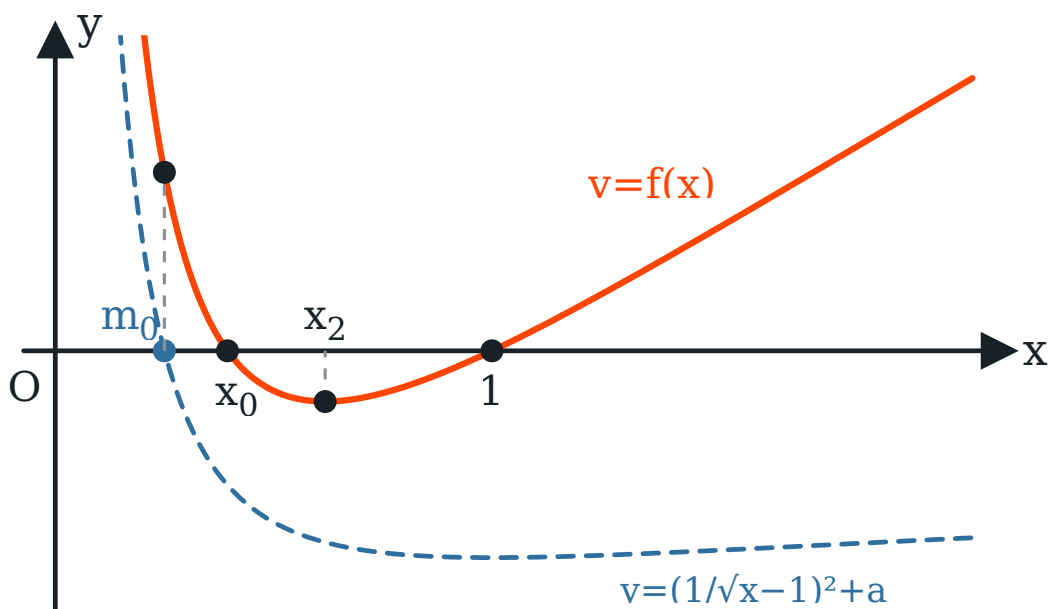
又 $a < 0$, $x > 0$ 时 $-a(x-1) = -ax + a > a$, 所以

$$f(x) > \ln x + \frac{1}{x} - 1 + a \geq 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + a = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right)^2 + a.$$

令 $\frac{1}{\sqrt{m_0}} - 1 = \sqrt{-a}$, 即 $m_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{-a} + 1} \right)^2 \in (0, 1)$, 则 $f(m_0) > 0$.

由于 $f(x) < 0$ 对 $x \in [x_2, 1)$ 成立, 而 $f(m_0) > 0$, 所以 $0 < m_0 < x_2 < 1$. $f(x)$ 在 (m_0, x_2) 上单调递减, 且 $f(m_0) > 0 > f(x_2)$, 由零点存在定理, $f(x)$ 在 $(0, x_2)$ 上恰有一个零点 x_0 .

所以 $f(x)$ 恰有 x_0 和 1 两个零点, 选项B正确.



分析选项C: 设 $a > 0$. 注意到 $f(1) = 0$, 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的最小值点, 必有 $f'(1) = 0$. 但 $f'(1) = 1 - 1 - a = -a < 0$, 矛盾. 故选项C错误.

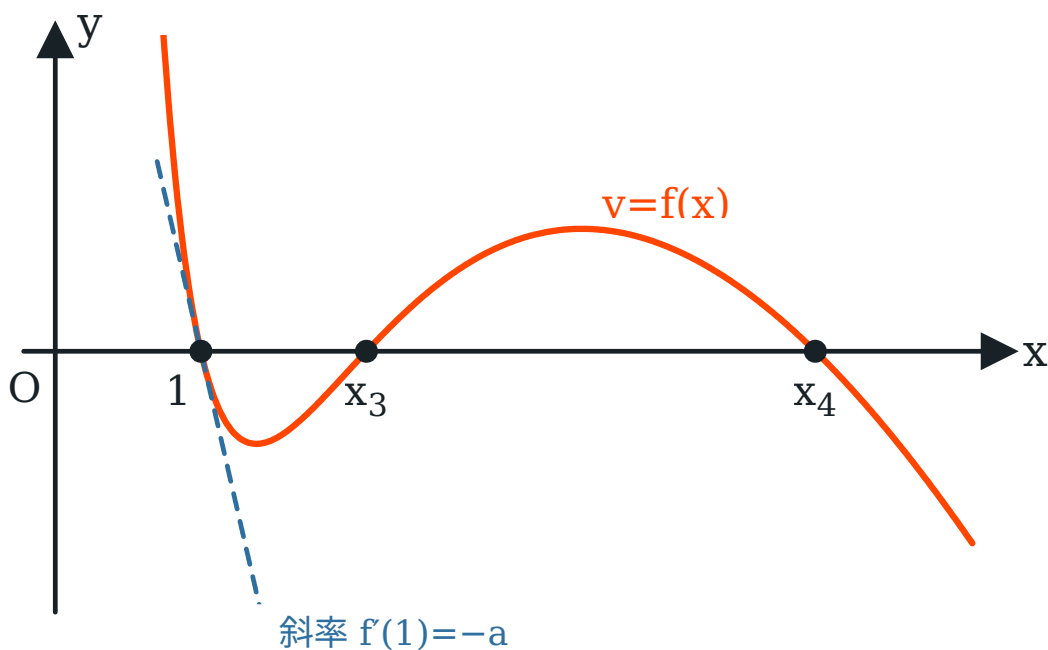
也可以用取点的方法具体找到 $f(x) < 0$ 的点. 当 $x > 1$ 时, 由 $\ln t < t - 1$ ($t = \sqrt{x} \neq 1$) 得 $\ln x < 2(\sqrt{x} - 1)$, 所以

$$f(x) < 2(\sqrt{x} - 1) + \frac{1}{x} - 1 - a(x - 1) = \frac{1}{x} [-ax^2 + 2x\sqrt{x} + (a - 3)x + 1] = \frac{1}{x} [-a(\sqrt{x})^4 + 2(\sqrt{x})^3 + (a - 3)(\sqrt{x})^2 + 1]$$

取 $x > \max \left\{ 1, \left(\frac{2}{a} - 1 \right)^2 \right\}$, 则 $\sqrt{x} - 1 > 0$, 且 $\sqrt{x} > \frac{2}{a} - 1$, 即 $a\sqrt{x} > 2 - a$, 于是 $a(\sqrt{x})^3 > (2 - a)(\sqrt{x})^2$,

$$-a(\sqrt{x})^3 + (2 - a)(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 1 < -\sqrt{x} - 1 < 0,$$

所以 $f(x) < 0$.



分析选项D: 当 $x \neq 1$ 时, 分离参数:

$$f(x) = (x-1)(h(x) - a), \quad h(x) = \frac{\ln x}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{x \ln x - (x-1)}{x(x-1)}.$$

由于 $f(1) = 0$, $f(x) = 0$ 有 3 个不同的实数解, 当且仅当方程 $h(x) = a$ 在 $x \neq 1$ 时有 2 个不同的根.

先看 $h(x)$ 的符号. 由 $\ln x > 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ ($x \neq 1$) 可知: $x > 1$ 时 $h(x) > 0$; $0 < x < 1$ 时 $h(x) < 0$. 所以当 $a > 0$ 时, $h(x) = a$ 的根都在 $(1, +\infty)$ 内.

再求导:

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x + \frac{(x-1)^2}{x^2}}{(x-1)^2} = \frac{t(x)}{(x-1)^2}, \quad t(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \ln x,$$

所以 $t(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递减, 在 $(1, 2)$ 上递增, 在 $(2, +\infty)$ 上递减. 又 $t(1) = 0$, 故 $t(x) > 0$ 对 $x \in (0, 1) \cup (1, 2]$ 成立; 而

$$t(4) = \frac{21}{16} - 2\ln 2 < \frac{21}{16} - 2 \times 0.69 < 0,$$

所以存在唯一的 $m_1 \in (2, 4)$ 使 $t(m_1) = 0$, 且 $x \in (0, 1) \cup (1, m_1)$ 时 $t(x) > 0$, $x \in (m_1, +\infty)$ 时 $t(x) < 0$.

因此 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, $(1, m_1)$, 单调递减区间为 $(m_1, +\infty)$.

再看端点. 由洛必达法则,

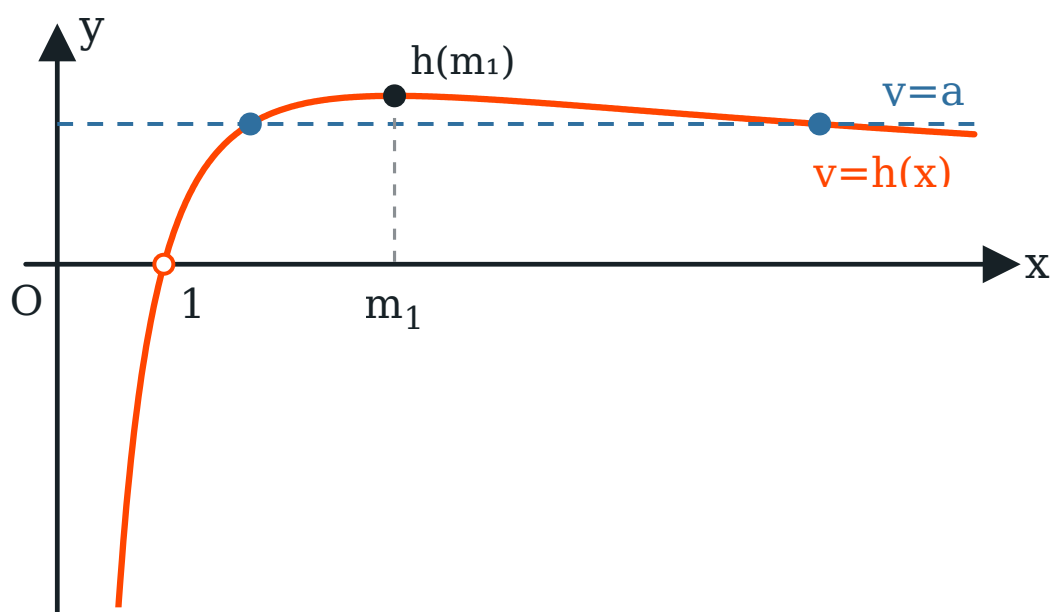
$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{2x - 1} = 0,$$

即 $x = 1$ 是 $h(x)$ 的可去间断点; 又 $x \rightarrow +\infty$ 时 $\frac{\ln x}{x-1} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, 所以 $h(x) \rightarrow 0$.

最后求最大值. 由 $t(m_1) = 0$ 得 $\ln m_1 = 2 - \frac{3}{m_1} + \frac{1}{m_1^2} = \frac{(2m_1 - 1)(m_1 - 1)}{m_1^2}$, 代入得

$$h(m_1) = \frac{2m_1 - 1}{m_1^2} - \frac{1}{m_1} = \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_1^2} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m_1}\right)^2.$$

由 $m_1 \in (2, 4)$ 得 $\frac{1}{m_1} \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, 所以 $h(m_1) \in \left(\frac{3}{16}, \frac{1}{4}\right)$, 特别地 $h(m_1) > 0$.



综上, $h(x)$ 在 $(1, m_1)$ 上的值域为 $(0, h(m_1))$, 在 $(m_1, +\infty)$ 上的值域也为 $(0, h(m_1))$. 所以当 $a \in (0, h(m_1))$ 时, $h(x) = a$ 在这两个区间内各有一个根, $f(x) = 0$ 连同 $x = 1$ 共有 3 个不同的实数解. 例如取 $a = \frac{1}{8} < \frac{3}{16} < h(m_1)$ 即可. 因此选项 D 正确.

故选 C.