

一元三次方程的判别式

从函数单调性出发推导一元三次方程判别式，分析三次方程实根情况，并将判别式应用于高考切线问题。

2026年8月8日 · 数学 · 代数 · 一元三次方程 · 判别式 · 高考数学

引

研究方程,自然要研究根的情况. 对于二次方程,我们有判别式:

$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

来判断根的情况.

- $\Delta < 0$, 无实数根
- $\Delta = 0$, 有两个相等的实数根
- $\Delta > 0$, 有两个不相等的实数根

那么,对于三次函数,是否也有简明的判断情况?

推导

抛砖

为了方便起见,我们只研究首系数为1的三次方程:

$$x^3 - px^2 + qx - d = 0$$

构造 $f(x) = x^3 - px^2 + qx - d$, 显然 $f(x)$ 的值域为 R , 我们先取出两个符号不同的端点:

$$\begin{aligned}
 M \geq 1, f(M) &\geq M^3 - |p|M^2 - |q|M - |d| \\
 &\geq M^3 - |p|M^2 - |q|M^2 - |d|M^2 \\
 &= M^2(M - |p| - |q| - |d|) > 0 \\
 &\Longleftarrow M = 1 + |p| + |q| + |d|
 \end{aligned}$$

同理,我们计算 $f(-M)$:

$$\begin{aligned}
 f(-M) &\leq -M^3 + |p|M^2 + |q|M + |d| \\
 &\leq -M^3 + |p|M^2 + |q|M^2 + |d|M^2 \\
 &= -M^2 < 0
 \end{aligned}$$

根据零点存在性定理,三次方程至少有一个实根.

引玉

更加细致地,我们通过导数判断 $f(x) = 0$ 是否有存在更多实数解的可能:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 3x^2 - 2px + q \\
 \Delta &= 4p^2 - 12q = 4(p^2 - 3q)
 \end{aligned}$$

如果 $\Delta < 0$,则 $f'(x) > 0$,那么 $f(x)$ 仅有一个实数根.

如果 $\Delta = 0$, $f'(x) \geq 0$,则 $f(x)$ 近有一个实数根,这个实数根可能是单实数根,也可能是三重实根.

如果 $\Delta > 0$,设 $x_1 < x_2$ 是 $f'(x) = 0$ 的两根:

- $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.
- $x \in (x_1, x_2)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

并且,比较 x_1, x_2 与 M 的大小得:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 3q}}{3} \\
|x_{1,2}| &\leq \left| \frac{p}{3} \right| + \left| \frac{\sqrt{p^2 - 3q}}{3} \right| \\
&\leq \left| \frac{p}{3} \right| + \left| \frac{\sqrt{p^2} + \sqrt{3|q|}}{3} \right| \\
&\leq \left| \frac{p}{3} \right| + \left| \frac{p}{3} \right| + \left| \sqrt{\frac{|q|}{3}} \right| \\
&\leq \left| \frac{2p}{3} \right| + \sqrt{2|q|} (q = 0) \\
&\leq \left| \frac{2p}{3} \right| + 1 + |q| \leq M (p = d = 0, q = 1) \\
&= 1 + |p| + |q| + |d|
\end{aligned}$$

由于取等条件矛盾,所以等号不能同时取到,有: $|x_{1,2}| < M$.

所以,根据函数单调性可以判断,三次函数有三个不同的实数根等价于:

$$\begin{cases} p^2 - 3q > 0, \\ f(x_1)f(x_2) < 0 \end{cases}$$

三次函数有一个实数根和一对重根等价于:

$$\begin{cases} p^2 - 3q > 0, \\ f(x_1)f(x_2) = 0 \end{cases}$$

三次函数有一个实数根和一对共轭虚根等价于:

$$f(x_1)f(x_2) > 0 \text{ or } p^2 - 3q < 0$$

三次函数有一个三重实根等价于:

$$f(x_1)f(x_2) = 0 \text{ and } p^2 - 3q = 0$$

可见,问题的关键是算出 $f(x_1)f(x_2)$.

$$\begin{cases} 3x_1^2 - 2px_1 + q = 0, \\ 3x_2^2 - 2px_2 + q = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1^2 = \frac{2px_1 - q}{3}, \\ x_2^2 = \frac{2px_2 - q}{3} \end{cases}$$

贸然使用求根公式并不可靠,应该利用 $f'(x) = 0$ 降次:

$$\begin{aligned}
 f(x_1) &= x_1^3 - px_1^2 + qx_1 - d \\
 &= (x_1 - p)(x_1^2) + qx_1 - d \\
 &= (x_1 - p)\frac{2px_1 - q}{3} + qx_1 - d \\
 &= \frac{2px_1^2 - (q + 2p^2)x_1 + pq}{3} + qx_1 - d \\
 &= \frac{2p\frac{2px_1 - q}{3} - (q + 2p^2)x_1 + pq}{3} + qx_1 - d \\
 &= \frac{-2p^2 + 6q}{9}x_1 + \frac{pq - 9d}{9}
 \end{aligned}$$

同理: $f(x_2) = \frac{-2p^2 + 6q}{9}x_2 + \frac{pq - 9d}{9}$

$$k = 2(3q - p^2), \quad b = pq - 9d,$$

带入 $f(x_1)f(x_2)$:

$$\begin{aligned}
 81f(x_1)f(x_2) &= (kx_1 + b)(kx_2 + b) \\
 &= k^2x_1x_2 + kb(x_1 + x_2) + b^2 \\
 &= \frac{k^2q}{3} + \frac{2pkb}{3} + b^2.
 \end{aligned}$$

代入

$$k = 2(3q - p^2), \quad b = pq - 9d,$$

得到

$$\begin{aligned}
 81f(x_1)f(x_2) &= \frac{4q(3q - p^2)^2}{3} \\
 &\quad + \frac{4p(3q - p^2)(pq - 9d)}{3} \\
 &\quad + (pq - 9d)^2.
 \end{aligned}$$

两边乘以 3:

$$\begin{aligned}
 243f(x_1)f(x_2) &= 4q(3q - p^2)^2 \\
 &\quad + 4p(3q - p^2)(pq - 9d) \\
 &\quad + 3(pq - 9d)^2.
 \end{aligned}$$

分别展开:

$$4q(3q - p^2)^2 = 36q^3 - 24p^2q^2 + 4p^4q,$$

$$4p(3q - p^2)(pq - 9d) = 12p^2q^2 - 4p^4q \\ - 108pqd + 36p^3d,$$

$$3(pq - 9d)^2 = 3p^2q^2 - 54pqd + 243d^2.$$

相加得

$$243f(x_1)f(x_2) = 36p^3d - 9p^2q^2 - 162pqd + 36q^3 + 243d^2.$$

所以

$$f(x_1)f(x_2) < 0$$

等价于

$$36p^3d - 9p^2q^2 - 162pqd + 36q^3 + 243d^2 < 0.$$

化简系数:

$$\Delta = p^2q^2 - 4q^3 - 4p^3d - 27d^2 + 18pqd$$

一元二次方程只有一个判别式,而一元三次方程居然有两个判别式,我们不禁思考: $p^2 - 3q \geq 0$ 和 $\Delta = p^2q^2 - 4q^3 - 4p^3d - 27d^2 + 18pqd > 0$ 是否是两个独立的条件?

研究这个问题,我们把 d 当成主元, p, q 作为变量,按照 d 的降幂排列:

$$\Delta = -27d^2 + (18q - 4p^2)pd + q^2(p^2 - 4q) > 0$$

这是一个关于 d 的一元二次不等式,要求其有实数解:

$$\Delta_{\Delta} = (18q - 4p^2)^2p^2 + 108q^2(p^2 - 4q) > 0$$

当 $p^2 = 3q$,恰好有 $\Delta_{\Delta} = 0$,这说明 $p^2 - 3q$ 是 Δ_{Δ} 的一个因式:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\Delta} &= (18q - 4p^2)^2 p^2 + 108q^2(p^2 - 4q) \\
 &= [6q - 4(p^2 - 3q)]^2 [(p^2 - 3q) + 3q] + 108q^2[(p^2 - 3q) - q] \\
 &= 16(p^2 - 3q)^3 \\
 &= 16(p^2 - 3q)^3 > 0
 \end{aligned}$$

这表明,如果有 $\Delta = p^2q^2 - 4q^3 - 4p^3d - 27d^2 + 18pqd > 0$,一定有 $p^2 - 3q > 0$

若 $p^2 - 3q < 0$,必然有 $\Delta = -f(x_1)f(x_2) < 0$

反之, $p^2 - 3q > 0$,需要有合适的 d 才能让 $\Delta = -f(x_1)f(x_2) > 0$ (一元三次方程有三个不同的实数根).

重新叙述

三次方程 $x^3 - px^2 + qx - d = 0$ 的判别式为:

$$\Delta = p^2q^2 - 4q^3 - 4p^3d - 27d^2 + 18pqd$$

三次函数有三个不同的单实数根等价于:

$$\Delta > 0$$

三次函数有一个单实数根和一个二重重根等价于:

$$\begin{cases} p^2 - 3q > 0, \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

三次函数有一个单实数根和一对共轭虚根等价于:

$$\Delta < 0$$

三次函数有一个三重实根等价于:

$$p^2 - 3q = \Delta = 0$$

高考实战

(节选自2014北京:文)已知函数 $f(x) = 2x^3 - 3x$.

(3)问过点 $A(-1, 2)$, $B(2, 10)$, $C(0, 2)$ 分别存在几条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切?

设过点 $P(x_0, y_0)$ 的直线为

$$y = k(x - x_0) + y_0.$$

与曲线 $y = 2x^3 - 3x$ 联立:

$$2x^3 - 3x = k(x - x_0) + y_0,$$

即

$$2x^3 - (k + 3)x + (kx_0 - y_0) = 0.$$

对于一般三次方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, 其判别式为

$$\Delta = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd.$$

这里

$$a = 2, \quad b = 0, \quad c = -(k + 3), \quad d = kx_0 - y_0,$$

所以

$$\begin{aligned}\Delta &= -4 \cdot 2[-(k + 3)]^3 - 27 \cdot 2^2(kx_0 - y_0)^2 \\ &= 8(k + 3)^3 - 108(kx_0 - y_0)^2.\end{aligned}$$

直线与曲线相切时, 交点方程有重根, 因此

$$\Delta = 0.$$

约去 4, 得

$$2(k + 3)^3 - 27(kx_0 - y_0)^2 = 0.$$

展开:

$$2k^3 + (18 - 27x_0^2)k^2 + (54 + 54x_0y_0)k + 54 - 27y_0^2 = 0.$$

记此关于 k 的三次方程为 $F(k) = 0$ 。

1. 点 $A(-1, 2)$

代入 $x_0 = -1, y_0 = 2$:

$$2k^3 - 9k^2 - 54k - 54 = 0.$$

其判别式为

$$\Delta_A = 78732 > 0.$$

所以该方程有三个不同的实根，即有三个不同的实数斜率，故

A 点有 3 条切线.

2. 点 $B(2, 10)$

代入 $x_0 = 2, y_0 = 10$:

$$2k^3 - 90k^2 + 1134k - 2646 = 0.$$

除以 2:

$$k^3 - 45k^2 + 567k - 1323 = 0.$$

因式分解:

$$k^3 - 45k^2 + 567k - 1323 = (k - 3)(k - 21)^2.$$

所以不同的斜率只有

$$k = 3, \quad k = 21.$$

虽然判别式为 0，但方程有一个单根和一个二重根，因此有两个不同的斜率，故

B 点有 2 条切线.

3. 点 $C(0, 2)$

代入 $x_0 = 0, y_0 = 2$:

$$2k^3 + 18k^2 + 54k - 54 = 0.$$

其判别式为

$$\Delta_C = -1259712 < 0.$$

所以该方程只有一个实根，即只有一个实数斜率，故

C 点有 1 条切线.

因此最终结果为

$A : 3$ 条, $B : 2$ 条, $C : 1$ 条.

其中，关键的正确斜率方程是

$$2k^3 + (18 - 27x_0^2)k^2 + (54 + 54x_0y_0)k + 54 - 27y_0^2 = 0.$$