

连续项和构成的集合

整理一道关于数列连续项和集合的题目，涉及集合去重、指定和的存在性，以及按大小排列后的项数。

2026年10月2日 · 数学 · 数列

连续项和构成的集合

题目

已知数列 $\{a_n\}$ ，记集合

$$T = \{S(i, j) \mid S(i, j) = a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j, \quad 1 \leq i < j, \quad i, j \in \mathbb{N}^*\}.$$

- 对于数列 $\{a_n\} : 1, 2, 3, 4$ ，写出集合 T 。
- 若 $a_n = 2n$ ，是否存在 $i, j \in \mathbb{N}^*$ ，使得 $S(i, j) = 1024$ ？若存在，求出一组符合条件的 i, j ；若不存在，说明理由。
- 若 $a_n = 2n - 2$ ，把集合 T 中的元素从小到大排列，得到新数列 $B : b_1, b_2, \dots, b_m, \dots$ 。若 $b_m \leq 2020$ ，求 m 的最大值。

(I) $T = \{3, 5, 7, 6, 9, 10\}$ 。

(II)

$$\begin{aligned} S(i, j) &= 2[i + (i+1) + (i+2) + \cdots + (j-1) + j] \\ &= 2 \cdot \frac{(j-i+1)(i+j)}{2} \\ &= (i+j)(j-i+1) \end{aligned}$$

不难看出， $i+j$ 与 $j-i+1$ 的奇偶性不同，因此必然有：

$$i+j=1, \quad j-i+1=1024,$$

或

$$i+j=1024, \quad j-i+1=1$$

无论上述哪种情况，都与 $j \geq i + 1 \geq 2$ 矛盾。

(III)

我们照猫画虎，提取 (II) 中的特征信息： $1024 = 2^{10}$ 。

$$\begin{aligned} S(i, j) &= 2[(i-1) + i + (i+1) + \cdots + (j-2) + (j-1)] \\ &= 2 \cdot \frac{(i+j-2)(j-i+1)}{2} \\ &= (i+j-2)(j-i+1) \end{aligned}$$

与 (II) 中的情况相仿， $i+j-2$ 与 $j-i+1$ 的奇偶性不同。对于 $S(i, j) = 2^n$ ，必然有：

$$i+j-2=1, \quad j-i+1=2^n,$$

或

$$i+j-2=2^n, \quad j-i+1=1$$

第二种情况与 $j \geq i + 1$ 矛盾，故考虑第一种情况：

$$i+j-2=1 \iff j=2, \quad i=1 \implies j-i+1=2, \quad 2^n=2, \quad n=1$$

因此，在所有 2^n 型数中， $S(i, j)$ 仅能表示 2。

接下来，我们进一步探讨： $S(i, j)$ 能表示什么类型的数？

由于 $i+j-2$ 与 $j-i+1$ 中必有一个偶数，因此 $S(i, j)$ 也是偶数。

每个正偶数都可以唯一表示为 $k \cdot 2^n$ ，其中 $n \in \mathbb{N}^*$ ， k 为奇数。因此，考虑以下两种分解方式：

$$\begin{aligned} i+j-2 &= k, & j-i+1 &= 2^n \\ i &= \frac{k+3}{2} - 2^{n-1}, & j &= \frac{k+1}{2} + 2^{n-1} \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} i+j-2 &= 2^n, & j-i+1 &= k \\ i &= \frac{3-k}{2} + 2^{n-1}, & j &= \frac{k+1}{2} + 2^{n-1} \end{aligned}$$

这里已经讨论过 2^n 型数。对于非 2^n 型的正偶数，必有 $k \geq 3$ 。下面讨论哪种分解合适。注意， n 为正整数。

若 $2^{n-1} < \frac{k+3}{2}$ ，则

$$i = \frac{k+3}{2} - 2^{n-1} > 0, \quad j - i = 2^n - 1 \geq 1$$

因此，第一种分解符合条件。

若 $2^{n-1} \geq \frac{k+3}{2}$ ，则第一种分解不符合条件。此时，第二种分解满足

$$i = \frac{3-k}{2} + 2^{n-1} \geq 3, \quad j - i = k - 1 \geq 2$$

所以，第二种分解符合条件。

综上，对于 2^n 型数，仅有 2 可以表示；对于非 2^n 型的正偶数，均可以表示。

现在考虑 $b_m \leq 2020$ ，即统计 $2, 4, 6, \dots, 2020$ 中有多少个数可以表示。

这 1010 个偶数中，恰有 $4, 8, 16, \dots, 1024$ 这 9 个数无法表示。

故答案为 $m = 1010 - 9 = 1001$ 。

补充：紧凑解答

(1) 六个连续区间对应的和为 3, 6, 10, 5, 9, 7，故

$$T = \{3, 5, 6, 7, 9, 10\}。$$

(2)

$$S(i, j) = 2(i + i + 1 + \dots + j) = (i + j)(j - i + 1)。$$

两因子之和为 $2j + 1$ ，故一奇一偶。若乘积为 1024，奇因子只能是 1；但 $i + j \geq 3$ 且 $j - i + 1 \geq 2$ ，矛盾。因此不存在这样的 i, j 。

(3) 令

$$x = i + j - 2, \quad y = j - i + 1。$$

由于 $a_n = 2n - 2 = 2(n - 1)$ ，

$$\begin{aligned}
 S(i, j) &= 2 \sum_{r=i}^j (r-1) \\
 &= 2 \cdot \frac{(j-i+1)((i-1) + (j-1))}{2} \\
 &= (i+j-2)(j-i+1) = xy.
 \end{aligned}$$

又

$$x + y = 2j - 1,$$

所以 x, y 一奇一偶。反解得

$$i = \frac{x - y + 3}{2}, \quad j = \frac{x + y + 1}{2}.$$

因此，给定正整数 x, y 时，若二者奇偶性不同、 $y \geq 2$ 且 $x \geq y - 1$ ，反解出的 i, j 都是整数，并且

$$i \geq 1, \quad j - i = y - 1 \geq 1;$$

也就是说，这三个条件保证 $1 \leq i < j$ 。反过来，由 $1 \leq i < j$ 得到的 x, y 也满足这三个条件。

现在设 N 是正偶数，唯一写成

$$N = 2^r q, \quad r \geq 1, \quad q \text{ 为正奇数}.$$

若 $q = 1$ ，则 $N = 2^r$ 。任何满足 $xy = 2^r$ 且 x, y 奇偶性不同的正整数因子对，只能是

$$(x, y) = (1, 2^r) \quad \text{或} \quad (x, y) = (2^r, 1).$$

第二种取法有 $y = 1$ ，不符合 $y \geq 2$ 。第一种取法还须满足 $x \geq y - 1$ ，即 $1 \geq 2^r - 1$ ，这仅在 $r = 1$ 时成立。因此 2 可以表示，而 4, 8, 16, ... 均不可表示。

若 $q \geq 3$ ，只需为 N 构造一组可行因子对。分两种情况：

- 若 $q \geq 2^r - 1$ ，取 $x = q, y = 2^r$ 。此时 x 为奇数、 $y \geq 2$ 为偶数，且由假设有 $x \geq y - 1$ 。
- 若 $q < 2^r - 1$ ，取 $x = 2^r, y = q$ 。此时 x 为偶数、 $y \geq 3$ 为奇数，且 $x > q + 1 > y - 1$ 。

两种情形都满足上述可行条件。代入反解式即可得到正整数 i, j ，使 $S(i, j) = xy = N$ 。所以 T 恰为所有正偶数，去掉大于 2 的 2 的幂。

不超过 2020 的正偶数共有 1010 个；其中不可表示的数为 $2^2, 2^3, \dots, 2^{10}$ ，共 9 个。因此

$$m = 1010 - 9 = 1001。$$