

海淀区2025年高二下数学期末新定义

给定正整数 $n(n \geq 3)$,若数列 $A_n : a_1, a_2, \dots, a_n$ 同时满足下列两个性质,则称数列 A_n 为 $P(n)$ 数列: 1. $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$ 2. 对任意 $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$,总存在 $j \in \{i+1, i+2, \dots, n\}$,使得 $|a_j - a_i| = 2$

2026年5月27日 · draft

给定正整数 $n(n \geq 3)$,若数列 $A_n : a_1, a_2, \dots, a_n$ 同时满足下列两个性质,则称数列 A_n 为 $P(n)$ 数列:

1. $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$
2. 对任意 $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$,总存在 $j \in \{i+1, i+2, \dots, n\}$,使得 $|a_j - a_i| = 2$.记 $P(n)$ 数列的个数为 b_n

(1)写出两个 $P(3)$ 数列 A_3

(2)若 A_n 为 $P(n)$ 数列,求 a_1 的值;

(3)求 $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ 的最大值.

(1)容易写出:

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{3, 1, 2\}, \{3, 2, 1\}$$

(2)由(1)知,不是所有的数都可以作为 a_1 ,中间的数(2)会出问题($|x-2|=2$, x 超出范围).

枚举简单:

$$n=3, a_1 = 1 \text{ or } 3$$

做几个简单的观察:

1. $a \rightarrow n+1-a$, 不会影响条件1和2
2. $1, 2, 3, \dots, n-1, n$ 为可行的 A_n ,则 $n, n-1, n-2, \dots, 1$ 也是可行的

深挖(1),猜想如果 $a_1 \pm 2 \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$,可能推出矛盾.

当 $3 \leq n \leq n-2$ 时:

$$\text{记 } B = \{a_1 - 2, a_1 - 4, a_1 - 6, \dots, t\}, \text{ 其中 } t = \begin{cases} 1, & a_1 \text{ 为奇数} \\ 2, & a_1 \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$C = \{a_1 + 2, a_1 + 4, a_1 + 6, \dots, s\}, \text{ 其中 } s = \begin{cases} n, & a_1 \text{ 与 } n \text{ 奇偶性相同} \\ n-1, & a_1 \text{ 与 } n \text{ 奇偶性不同} \end{cases}$$

根据二, a_1 可以不断生出 B, C 中的项, 那么 A_n 的最后两项一定是 B, C 中的数, 与 a_1 同奇偶性.

不妨设 a_n, a_{n-1} 为奇数, 利用极端原理, 考虑 A_n 中最后一个是偶数的项, 往后推的时候出现矛盾.

若 a_n, a_{n-1} 为偶数, 同理考虑最后一个奇数项, 导出矛盾.

$$\text{综上 } a_1 = \begin{cases} 1, 3, (n=3), \\ 1, 2, n-1, n, (n \geq 4) \end{cases}$$

(2) 注意到 $|a_j - a_i| = 2, a_i, a_j$ 奇偶性相同, 所以 A_n 中的奇数列和偶数列 “各行其是”.

$$\text{记 } x = \begin{cases} n, n \text{ 为奇数} \\ n-1, n \text{ 为偶数} \end{cases}, y = \begin{cases} n-1, n \text{ 为奇数} \\ n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

根据(2), a_{n-1}, a_n 必为一奇一偶.

考虑奇数列 $\{1, 3, 5, \dots, x\}$ (共 $\frac{x+1}{2}$ 个数) 在 A_n 中出现的先后顺序, 与(2)同理, 首次在 A_n 中出现的一定是1或x

接下来依次出现剩下数中的最小值或者最大值, 共 $2^{\frac{x+1}{2}-1}$ 种先后顺序.

同理, 偶数列 $\{2, 4, 6, \dots, y\}$ (共 $\frac{y}{2}$ 个数) 在数列中出现的先后顺序共 $2^{\frac{y}{2}-1}$ 中.

然后我们考虑奇数列在 A_n 中的绝对位置:

在 A_n 的最后两项中, 恰有一个奇数, 其余的奇数在前 $n-2$ 个空位里.

选定奇数列的绝对位置, 偶数列的绝对位置便确定了.

又因为刚才确定了奇数列和偶数列的内部相对位置, 故根据分步乘法原理:

$$b_n = 2C_{n-2}^{\frac{x+1}{2}-1} 2^{\frac{x+1}{2}-1} 2^{\frac{y}{2}-1} = C_{n-2}^{\frac{x-1}{2}} 2^{\frac{x+y-1}{2}}$$

根据奇偶性对n分类:

$$\begin{cases} b_{2k-1} = C_{2k-3}^{k-1} 2^{2k-2}, \\ b_{2k} = C_{2k-3}^{k-1} 2^{2k-1} \end{cases}$$

其中 $k = 2, 3, 4, \dots$

不难算得 $\frac{b_{2k}}{b_{2k-1}} = 4$

$$\frac{b_{2k+1}}{b_{2k}} = 4 - \frac{2}{k} < 4$$

故 $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ 最大值为4, 当且仅当 $n = 3, 5, 7, \dots$ 时取得.