

"比"翼双飞商数列

引入 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 a ,公差为2的无限等差数列, $\{b_n\}$ 是首项为1,公比为2的无限等比数列,记 $\lambda_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_n}$,给出下列四个结论:

2026年4月18日 · 高考数学 · 数列

引入

已知 $\{a_n\}$ 是首项为 a ,公差为2的无限等差数列, $\{b_n\}$ 是首项为1,公比为2的无限等比数列,记 $\lambda_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_n}$,给出下列四个结论:

- ①当 $0 < a < 2$ 时,有 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$;
- ②存在 $a \in \mathbb{R}$,使得 $\{\lambda_n\}$ 的前2025项为单调递增数列;
- ③对于任意 $a > 0$, $\{\lambda_n\}$ 从第三项起均为单调递减数列;
- ④当且仅当 $a = 2$ 时,存在 $k \in \mathbb{N}^*$,使得 $\lambda_k = \lambda_{k+1}$.

其中所有正确结论的序号是 ____ .

首先记 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ 对 S_n, b_n, λ_n 的前三项进行计算:

n	S_n	b_n	λ_n
1	a	1	a
2	$2a + 2$	2	$a + 1$
3	$3a + 6$	4	$\frac{3a+6}{4}$

要满足 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$,只要:

$\frac{3a+6}{4} > a + 1$ 即可,这等价于:

$a < 2$,于是①正确.

要让 $\lambda_{n+1} > \lambda_n$,等价于:

$S_{n+1} > 2S_n$,即:

$a_{n+1} > S_n$

更强地,只要:

$a_n < 0 (n = 1, 2, 3, \dots, 2024)$, 就可以满足 $S_n < S_{n-1} < \dots < S_1 = a < a_{n+1}$

更进一步,我们研究②的充要条件:

$$a_{n+1} = a + 2n > S_n = na + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = na + n(n-1) (n = 1, 2, \dots, 2024)$$

$n = 1$, 显然有: $a_2 = a + 2 > a_1 = a$

※: $a < \frac{-n^2+3n}{n-1} = -n + 2 + \frac{2}{n-1} (n = 2, 3, \dots, 2024)$

$u_n = -n + 2 + \frac{2}{n-1} = 1 - (n-1 - \frac{2}{n-1}) (n = 2, 3, \dots, 2024)$ 是递减数列.

所以②等价于: $a < u_{2024} = -2022 + \frac{2}{2023}$, ②正确.

再看③:

由②的分析, $a > 0 = u_3$, 即 $n > 3$ 时满足 $\lambda_{n+1} < \lambda_n$, ③正确.

最后看④:

只要取 $a = u_n$, 即可满足 $\lambda_n = \lambda_{n+1}$, ④错误.

综上, 选①②③.

练习

(2026北京大兴高二上期末) (10) 已知 $\{a_n\}$ 是各项均不为零的无限等差数列, 且公差为 d , 设

$c_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_n}$, 若 $a_3 \cdot d < 0$, 则数列 $\{c_n\}$

- (A) 有最大项, 无最小项
- (B) 无最大项, 无最小项
- (C) 有最大项, 有最小项
- (D) 无最大项, 有最小项

设 $a_1 = a, a_n = a + (n-1)d$, 则 $a_3 \cdot d = d(a+2d) < 0$

$$c_n = \frac{S_n}{a_n} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2a_n} = \frac{n}{2} \left(1 + \frac{a_1}{a_n}\right) = \frac{n}{2} \left(1 + \frac{a}{a + (n-1)d}\right) = \frac{n}{2} \left(1 + \frac{1}{1 + (n-1)\frac{d}{a}}\right)$$

又 $\frac{d}{a} (1 + 2\frac{d}{a}) < 0$, 即 $\frac{d}{a} \in (-\frac{1}{2}, 0)$

当 n 充分大时, $c_n / (\frac{n}{2}) \rightarrow 1, c_n \rightarrow +\infty$, 无最大项.

显然 c_n 的符号由 $1 + \frac{1}{1+(n-1)\frac{d}{a}}$ 决定,如果 c_n 中小于0的项是有限的,肯定有最小的 c_n .

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{1 + (n-1)\frac{d}{a}} &< 0 \\ \Leftrightarrow 1 + (n-1)\frac{d}{a} &\in (-1, 0) \\ \Leftrightarrow (n-1) &\in (0, \frac{-2}{\frac{d}{a}}) \end{aligned}$$

其中, $\frac{-2}{\frac{d}{a}} > 4$,这样的 n 只有有限种可能,所以 c_n 有最小项.

PS:这道题Grok没做出来,DeepSeek做出来了,马斯克出来挨打)

结语

数列的极值问题，不仅要看趋势，更要看“转折”。符号的变化往往比单调区间更能揭示极值的存在性。

当 c_n 的无穷远处趋势已定，极值就藏在有限项的符号交错之间。

你能抓住这一点，说明对数列结构的理解已经相当深刻。

至于 Grok，它或许擅长海量模式匹配，但真正需要数学洞察力的地方，它还是差了点“灵性”。

继续这样思考下去，高考数列压轴题也不过是纸老虎。