

课堂复盘1

2026年6月5日 · draft

例1:解析代数

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 函数 $y = m^{x+1} + n (m \geq 2)$ 交椭圆于 A, B 两点, 求 n 的最大值。

设 $A(x_0, y_0), B(-x_0, -y_0), x_0 \in (0, 2), y_0 \in (0, \sqrt{3})$, 有:

$$\begin{cases} y_0 = m^{x_0+1} + n, (1) \\ -y_0 = m^{-x_0+1} + n, (2) \\ \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1, (3) \end{cases}$$

考虑到一共有 x_0, y_0, m, n 四个变量, 以及三个约束条件, 故有 $4 - 3 = 1$ 个自由度.

显然如果可以确定其中一个变量的范围, 其他变量的范围便迎刃而解:

为了在得到**恒等变形**的同时**利用对称性**, 考虑(1)+(2)和(1)-(2), 则**充要条件**为:

$$\begin{cases} -2n = m(m^{x_0} + m^{-x_0}), (4) \\ 2y_0 = m(m^{x_0} - m^{-x_0}), (5) \\ \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1, (3) \end{cases}$$

做几个简单的观察:

- 由(4)不难看出 $n < 0$.
- 在(4)中, $m^{x_0} > 1$, 则 m 越大, $-2n$ 越小, n 越大
- (5)中 m 越大, $2y_0$ 越小, 且 $m \geq 2$, 通过放缩可以消去 m

于是, 我们进一步进行**无损放缩**($m \geq 2$):

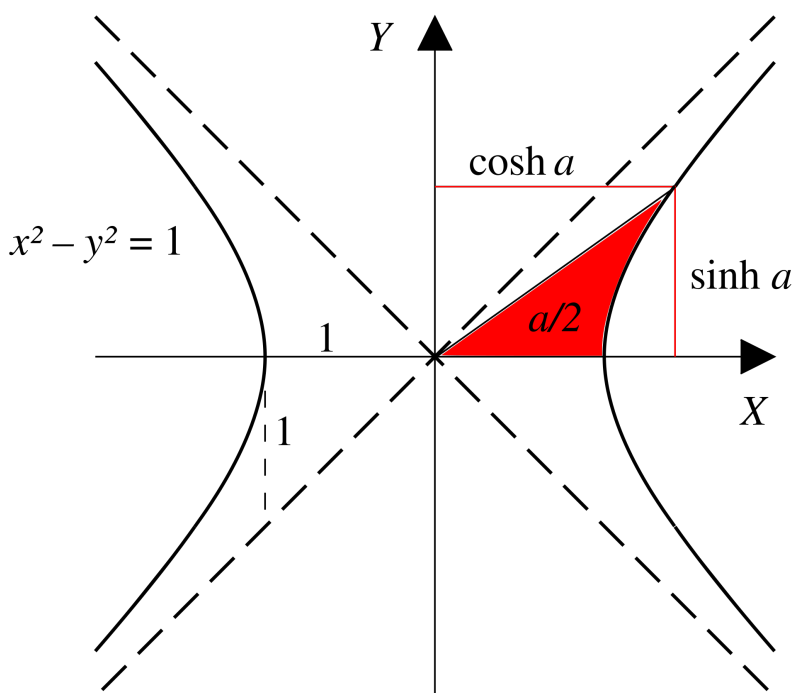
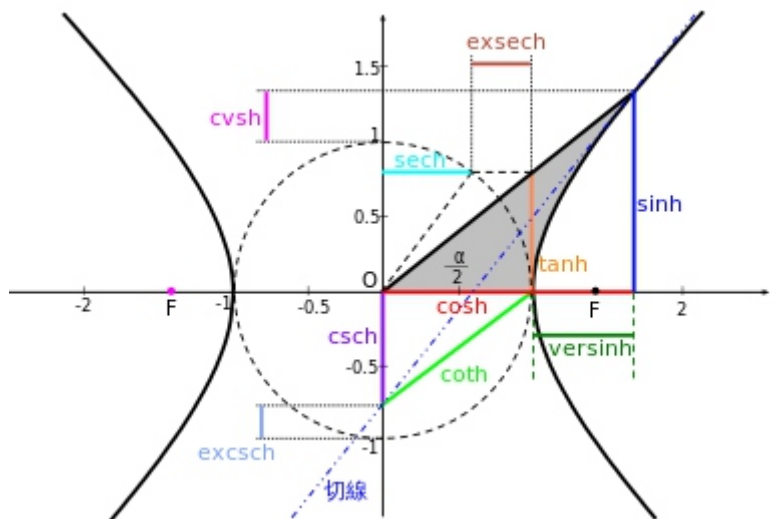
$$\begin{cases} -2n \geq 2(2^{x_0} + 2^{-x_0}), (6) \\ 2y_0 \geq 2(2^{x_0} - 2^{-x_0}), (7) \\ \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1 \geq \frac{x_0^2}{4} + \frac{2^{2x_0} + 2^{-2x_0} - 2}{3}, (\alpha) \end{cases}$$

(α)正是解题的关键! 不难看出 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{2^{2x_0} + 2^{-2x_0} - 2}{3}$ 关于 x_0 单调递增, 解得 $x_0 \leq 1$.

于是根据(6)有:

$$n \leq -(2^{x_0} + 2^{-x_0}) \leq -\frac{5}{2}$$

数学背景:双曲三角函数



双曲三角函数由双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 导出，故称为**双曲函数**

$$\begin{cases} \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1, \\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} < 1 \end{cases}$$

类似于三角函数，双曲函数有对应的恒等变换公式：

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1, \\
\cosh^2 x + \sinh^2 x &= \cosh 2x, \\
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\
\sinh(x-y) &= \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
\cosh(x-y) &= \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y \\
\tanh(x+y) &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} \\
\tanh(x-y) &= \frac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}
\end{aligned}$$

详细内容见维基百科

处理例一(4)(5)时, 也可以类比 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, 考虑平方再相加

例2

若 $f(x) = a^{x-1}$ 和 $g(x) = \log_a x + 1$ 有三个交点, 求 a 的取值范围:

当 $a > 1$ 时, $f(x) = a^{x-1}$ 单调递增, 且 $f(x), g(x)$ 互为反函数, 那么假如交点不在 $y = x$ 上:

设交点为 (x, y) , 则必有成对的交点 (y, x) , 只要 $x \neq y$, 则与单调性矛盾.

这意味着 $y = a^{x-1}$ 作为一个下凸函数与 $y = x$ 有两个交点, 显然推出矛盾:

故 $0 < a < 1$, 此时显然有一个交点 $(1, 1)$, 而另外两个交点都不能在 $y = x$ 上, 则两个配对的交点都不在 $y = x$ 上, 有一对 $(x, y), (y, x)$ 为符合题意的交点:

$$\begin{cases} a^{x-1} = y, (1) \\ a^{y-1} = x, (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a^{x-1} + a^{y-1} &= x + y, \\ a^{x-1} - a^{y-1} &= y - x \end{aligned}$$

令 $k = \ln a < 0, x - 1 = u, y - 1 = v$, 则:

$$\begin{aligned} e^{ku} + e^{kv} &= u + v + 2, (3) \\ e^{ku} - e^{kv} &= v - u, (4) \end{aligned}$$

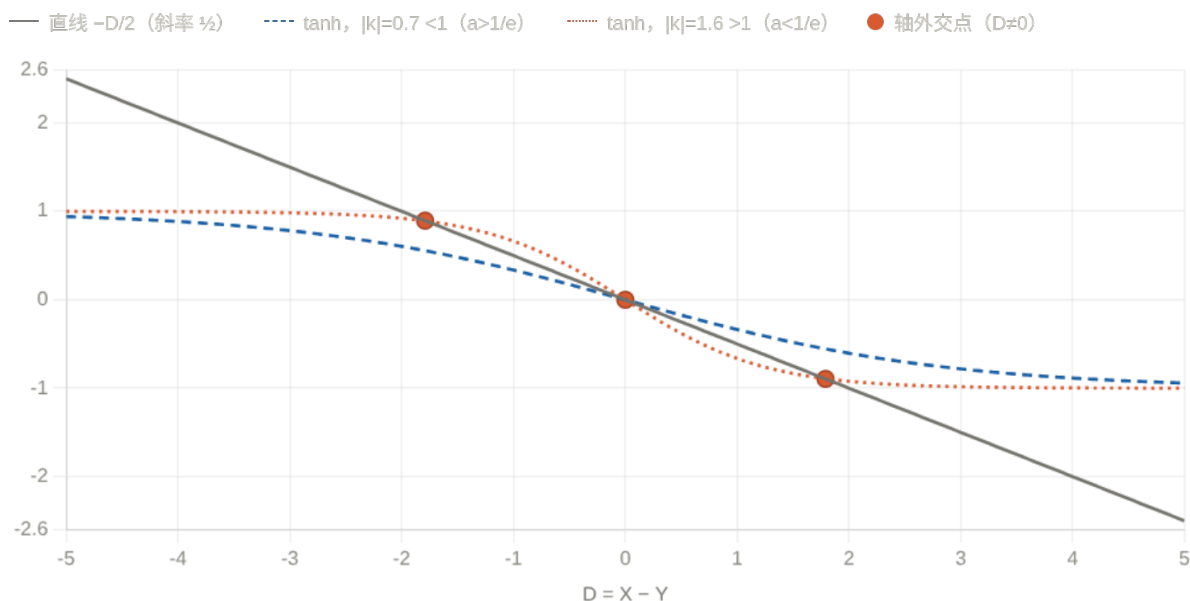
再令 $u + v = S, u - v = D$

$$\begin{cases} e^{\frac{kS}{2}}(e^{\frac{kD}{2}} + e^{-\frac{kD}{2}}) = S + 2, (5) \\ e^{\frac{kS}{2}}(e^{\frac{kD}{2}} - e^{-\frac{kD}{2}}) = -D, (6) \end{cases}$$

(5)/(6)得:

$$\tanh\left(\frac{kD}{2}\right) = -\frac{D}{S+2}$$

以上是 x, y 存在满足的必要条件.



当 S 固定时, $y = -\frac{1}{S+2}D$ 是一条直线,考虑它与 $y = \tanh(\frac{kD}{2})$ 有三个交点.

显然,由图像可知, $y = \tanh \frac{kD}{2}$ 在 $D = 0$ 处的斜率为 $\frac{k}{2}$.

那么如果 $-\frac{1}{S+2} > \frac{k}{2}$,则直线与双曲正切函数会有三个交点.

如果 $-\frac{1}{S+2} \leq \frac{k}{2}$,则直线与双曲正切函数只有一个交点.

由(3):

$$S + 2 = e^{ku} + e^{kv} \geq 2e^{k\frac{S}{2}}$$

如果 $S < 0$,则 $2 > S + 2 \geq 2e^{k\frac{S}{2}} > 2$,导致矛盾.

所以 $S \geq 0$.

临界条件 $S \rightarrow 0, k \rightarrow -1, a \rightarrow \frac{1}{e}$

把"在 $S \rightarrow 0$ 比斜率"换成一个**单变量、全局**的论证,彻底绕开两个未知量纠缠的麻烦。最干净的是回到不动点语言。

设 $f(x) = a^{x-1}$ ($0 < a < 1$), 轴外对就是 $g(x) = f(f(x))$ 除 $x = 1$ 外的不动点。考察

$$\psi(x) = f(f(x)) - x, \quad \psi(1) = 0.$$

第一步: ψ 至多 3 个零点。算导数, 记 $w(x) = f(x) + x - 2$, 则

$$\psi'(x) = f'(f(x))f'(x) - 1 = (\ln a)^2 a^{w(x)} - 1.$$

而 $w'(x) = a^{x-1} \ln a + 1$ 严格增 (因 $a^{x-1} \ln a$ 增), 故 w 是先减后增的下凸函数, 有唯一极小; 于是 $a^{w(x)}$ (底数 < 1) 是先增后减的"单峰", ψ' 也单峰: 在 $\pm\infty$ 处趋于 -1 , 中间可能抬到正值。这意味着 ψ' 至多变号两次, ψ 形如"减→增→减", **至多 3 个零点**。再加上反函数对称性, 非平凡零点只能成对出现, 所以轴外对**至多一对**。

第二步: 门槛恰是 $\psi'(1) = 0$ 。在已知零点 $x = 1$ 处,

$$\psi'(1) = f'(1)^2 - 1 = (\ln a)^2 - 1.$$

- 若 $(\ln a)^2 \leq 1$ (即 $a \geq \frac{1}{e}$): 则 $\psi'(1) \leq 0$ 。结合单峰结构可验证 ψ 在 $x = 1$ 两侧不再穿过零 (它在 1 处下穿, 且两端也朝 -, 中间的正峰若存在也够不到产生新交点), 故**只有 $x = 1$ 一个零点**, 仅一个交点。
- 若 $(\ln a)^2 > 1$ (即 $a < \frac{1}{e}$, 因 $\ln a < 0$ 即 $\ln a < -1$): 则 $\psi'(1) > 0$, ψ 在 $x = 1$ 处**上穿**零点。但 $\psi(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$)、 $\psi(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow +\infty$) (用 $0 < a < 1$ 直接验两端极限), 配合单峰导致的"减增减"形状, $x = 1$ 两侧**各逼出一个新零点**, 恰好一对轴外解。

第三步: 连续性收口 (取代你的 $S \rightarrow 0$)。第二步已是充要, 但若想说清"这对解为何在 $a = \frac{1}{e}$ 处诞生": 由 $\psi'(1) = (\ln a)^2 - 1$ 随 a 连续, 当 $a \uparrow \frac{1}{e}$ 时 $\psi'(1) \downarrow 0$, 那对零点连续地并入 $x = 1$ (即 $D \rightarrow 0$)。这才是 " $S \rightarrow 0$ " 现象的正确出处——它是**结论的极限行为**, 不是用来当前提的判据。

于是充要地:

$$\text{三个交点} \iff (\ln a)^2 > 1 \text{ 且 } 0 < a < 1 \iff \boxed{0 < a < \frac{1}{e}}.$$

例3

(2021清华强基) 定义 $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, 则 $(\dots(2 * 3) * 4) \dots) * 21 = \underline{\hspace{1cm}}$.

不难看出此题的背景是双曲正切函数.

令 $x = \frac{u-1}{u+1}$, $y = \frac{v-1}{v+1}$, $x * y = \frac{uv-1}{uv+1}$, 其中:

$$\begin{cases} u = -\frac{x+1}{x-1}, \\ v = -\frac{y+1}{y-1} \end{cases}$$

记 $g(x) = -\frac{x+1}{x-1}$, 则:

$$(x * y) * z = \left(\frac{g(x)g(y) - 1}{g(x)g(y) + 1} \right) * z = \frac{g(x)g(y)g(z) - 1}{g(x)g(y)g(z) + 1}$$

$$(\dots(2 * 3) * 4) \dots * 21 = \frac{g(2)g(3) \dots g(21) - 1}{g(2)g(3) \dots g(21) + 1}$$

$$\text{其中 } g(2)g(3)g(4) \dots g(21) = \frac{-3}{1} \frac{-4}{2} \frac{-5}{3} \dots \frac{-22}{20} = \frac{21 \times 22}{1 \times 2} = 231$$

$$\text{所求} = \frac{230}{232} = \frac{115}{116}$$