

Index

小蓝本《均值不等式与柯西不等式》第一章课后习题(个人解答)

2026年5月5日 · draft

小蓝本《均值不等式与柯西不等式》第一章课后习题(个人解答)

第一题

设 $a, b, c > 0, abc = 1$, 求证:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

证明:我们做齐次化

$$LHS = ab + bc + ca, RHS = \sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) = a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}$$

则 $LHS = a\frac{b+c}{2} + b\frac{c+a}{2} + c\frac{a+b}{2} \geq RHS(a = b = c = 1)$

第二题

设 $a, b, c \geq 0, a + b + c > 0$, 求证: $\frac{(a+b)^3(b+c)^2(c+a)}{(a+b+c)^6} \leq \frac{4}{27}$

证明:注意到式子的齐次性,只要在分母上放均值不等式,让 $a + b, b + c, c + a$ 的次数分别为3, 2, 1即可.

$$\text{原式} = \frac{(a+b)^3(b+c)^2(c+a)}{(3\frac{a+b}{6} + 2\frac{b+c}{4} + \frac{c+a}{2})^6} \leq \frac{(a+b)^3(b+c)^2(c+a)}{(6\sqrt[6]{(\frac{a+b}{6})^3(\frac{b+c}{4})^2(\frac{c+a}{2})})^6} = \frac{6^3 \times 4^2 \times 2}{6^6} = \frac{27}{4}$$

取等条件: $\frac{a+b}{6} = \frac{b+c}{4} = \frac{c+a}{2} = k > 0$

$$\text{即} \begin{cases} a + b = 6k, \\ b + c = 4k, \\ c + a = 2k \end{cases}$$

$$\text{解得:} \begin{cases} a = 2k, \\ b = 4k, \\ c = 0 \end{cases}$$

触类旁通:(2025北京预赛)正实数 a, b, c, d 满足 $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = 36, (a + d)\sqrt{b^2 + c^2} = 6$, 则 a^2d 的最大值是_____.

注意到 $36 = 6^2$, 很难不让人想到柯西不等式.

$$[a^2 + (b^2 + c^2)][(b^2 + c^2) + d^2] = 36 \geq [(a + d)\sqrt{b^2 + c^2}]^2 = 36$$

由柯西不等式取等条件:

$$ad = (b^2 + c^2) = \frac{36}{(a+d)^2}, \text{即 } ad(a+d)^2 = 36$$

我们想办法凑出 a, b 次数比为2:1的形式.

$$36 = ad(a+d)^2 = ad(5\frac{a}{5} + d)^2 \geq ad(6\sqrt[5]{(\frac{a}{5})^5 d})^2 = 36(\frac{1}{5})^{\frac{5}{3}} a^{\frac{8}{3}} d^{\frac{4}{3}}$$

$$\text{所以: } (a^2 d)^{\frac{4}{3}} \leq 5^{\frac{5}{3}}, a^2 d \leq 5^{\frac{5}{4}}$$

第三题

已知 $0 < a, b, c < 1$, 并且 $ab + bc + ca = 1$. 证明:

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

证明: 熟知在三角形ABC中有如下恒等式:

$$\sum_{cyc} \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = 1$$

令 $a = \tan \frac{A}{2}, b = \tan \frac{B}{2}, A, B \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则:

$$c = \frac{1-ab}{a+b} = \frac{1}{\tan(\frac{A+B}{2})} = \tan \frac{\pi - A - B}{2} = \tan \frac{C}{2} \in (0, 1)$$

但恐怕这道题无法使用三角换元顺利解决.

先观察取等条件: $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

或许可以考虑先用分式形式的柯西不等式(或者说权方和), 之后均值肯定是可用的.

分子不好, 那就要**改造分子**或用**分子乘分母型**的柯西不等式.

$$\text{原式} = \frac{a^2}{a-a^3} + \frac{b^2}{b-b^3} + \frac{c^2}{c-c^3} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a-a^3)+(b-b^3)+(c-c^3)} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{(a-a^3)+(b-b^3)+(c-c^3)}$$

$$\text{往证: } \sum_{cyc} (a - a^3) \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{而 } x - x^3 = x(1 - x^2) = \sqrt{\frac{2x^2(1-x^2)(1-x^2)}{2}} \leq \sqrt{\frac{(\frac{2}{3})^3}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \quad (x = \frac{\sqrt{3}}{3})$$

这个题很耐人寻味,但凡有一个数不一样,放缩就会不成立.

第四题

设 $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$, 满足 $abcd = 1, a + b + c + d > \sum_{cyc} \frac{a}{b}$.

求证: $a + b + c + d < \sum_{cyc} \frac{b}{a}$

证明: 条件复杂, 不知道怎么用, 故考虑反证法.

假设 $a + b + c + d \geq \sum_{cyc} \frac{b}{a}$

条件和假设好像是碎成两半的镜子, 具有某种共轭的感觉.

$$2(a + b + c + d) > \sum_{cyc} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)$$

我们证明更强的结论:

$$abcd = 1, 2(a + b + c + d) \leq \sum_{cyc} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)$$

直接放缩右边肯定是不好的, 我们想办法写出一些局部不等式.

$$a = \sqrt[4]{\frac{a^4}{abcd}} = \sqrt[4]{\frac{a}{b} \frac{a}{d} \frac{a}{b} \frac{b}{c}} \leq \frac{2\frac{a}{b} + \frac{a}{d} + \frac{b}{c}}{4}$$

$$b = \frac{2\frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{d}}{4}$$

...

那么恐怕一开始的方向有问题, 需要微调:

$$\text{累加以后是: } a + b + c + d \leq \sum_{cyc} \left(\frac{3a}{4b} + \frac{b}{4a} \right)$$

那么同样推出矛盾.