

[2027强基计划]解三角形

整理《2027强基计划》数学讲义第8章解三角形，涵盖边角关系、三角形的特殊线、托勒密定理及平面几何变换中的18道例题。

2026年8月12日 · 数学 · 强基计划 · 解三角形

第 8 章 解三角形

8.1 边角关系

例题 8.1

题目来源：北京大学

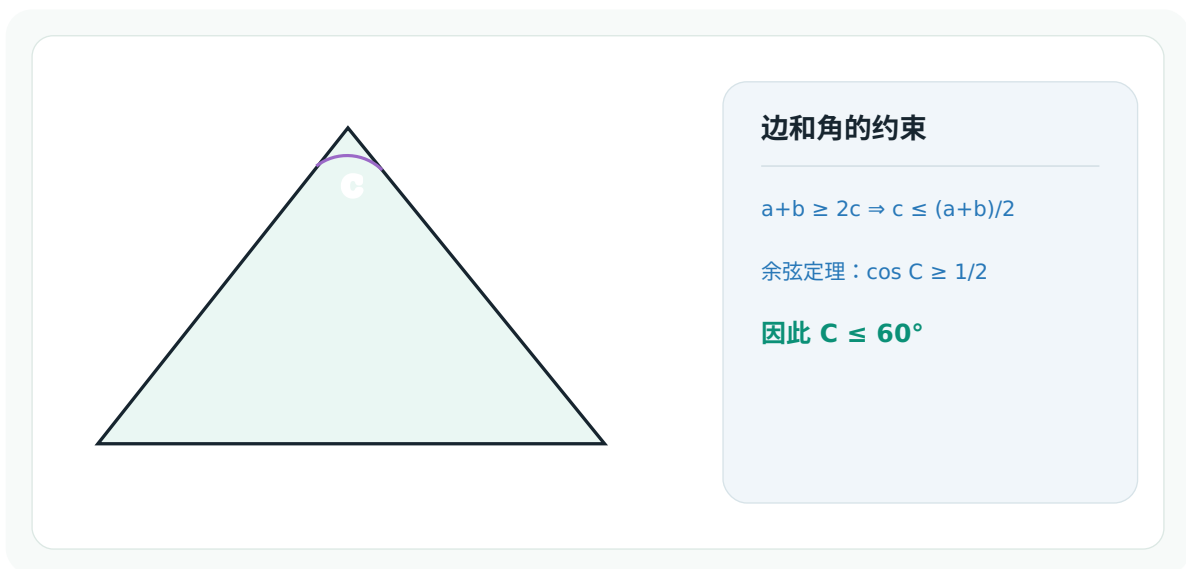
在 $\triangle ABC$ 中，如果 $a + b \geq 2c$ ，证明： $\angle C \leq 60^\circ$ 。

三角法

$$\begin{aligned}\sin A + \sin B &\geq 2 \sin C \\ 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} &\geq 2 \sin C \\ \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} &\geq \sin C \\ 1 \geq \cos \frac{A-B}{2} &\geq 2 \sin \frac{C}{2} \\ \sin \frac{C}{2} &\leq \frac{1}{2} \\ C &\leq \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

边角法

$$\begin{aligned}
 \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\
 &\geq \frac{a^2 + b^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{2ab} \\
 &= \frac{3(a^2 + b^2) - 2ab}{8ab} \\
 &\geq \frac{4ab}{8ab} = \frac{1}{2} \\
 C &\leq \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$



例题 8.1 的边角约束示意图

例题 8.2

设 a, b, c 是三角形的三边， A, B, C 分别是这三边所对的角。若

$$a^2 + b^2 = 2021c^2,$$

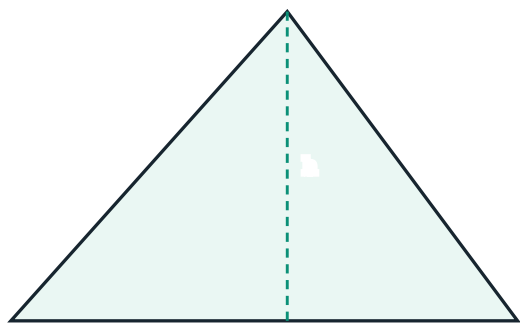
则

$$\frac{\cot C}{\cot A + \cot B} =$$

A. $\frac{1}{2021}$

- B. $\frac{1}{1010}$
- C. 1010
- D. 2021

$$\begin{aligned}
 & \frac{\cot C}{\cot A + \cot B} \\
 &= \frac{\frac{\cos C}{\sin C}}{\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B}} \\
 &= \frac{\frac{\cos C}{\sin C}}{\frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B}} \\
 &= \frac{\sin A \sin B \cos C}{\sin^2 C} \\
 &= \frac{ab \cos C}{c^2} \\
 &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2c^2} \\
 &= \frac{2020c^2}{2c^2} = 1010
 \end{aligned}$$



余切比化为边长

$$\begin{aligned}
 & \cot C / (\cot A + \cot B) \\
 &= ab \cos C / c^2 \\
 &= (a^2 + b^2 - c^2) / (2c^2) \\
 &= \mathbf{1010}
 \end{aligned}$$

例题 8.2 的余切比边长化示意图

例题 8.3

题目来源：清华大学

在 $\triangle ABC$ 中， A, B, C 的对边分别为 a, b, c 。已知

$$2 \sin^2 \frac{A+B}{2} = 1 + \cos 2C.$$

1. 求角 C 的大小;
2. 若 $c^2 = 2b^2 - 2a^2$, 求 $\cos 2A - \cos 2B$ 的值。

For 1:

$$\begin{aligned} 0 &= \cos 2C + \cos(A+B) \\ &= \cos 2C - \cos C \\ &= 2 \cos^2 C - \cos C - 1 \\ &= (2 \cos C + 1)(\cos C - 1) \\ \cos C - 1 &\neq 0, \cos C = -\frac{1}{2} \\ C &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

For 2:

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{3a^2 - b^2}{2ab} = \frac{1}{2} \\ 3a^2 - b^2 - ab &= 0 \\ \cos 2A - \cos 2B \\ &= (2 \cos^2 A - 1) - (2 \cos^2 B - 1) \\ &= 2(\cos^2 A - \cos^2 B) \end{aligned}$$

如果直接用边表示余弦,恐怕是复杂的,思路无以为继:

这里我们推导一个新公式:余弦平方差

$$\begin{aligned}\cos^2 x - \cos^2 y &= (\cos x + \cos y)(\cos x - \cos y) \\&= \left(2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}\right) \left(-2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}\right) \\&= -\sin(x+y) \sin(x-y)\end{aligned}$$

进一步化简:

$$\begin{aligned}\cos^2 A - \cos^2 B &= -\sin(A+B) \sin(A-B) \\&= -\sin \frac{\pi}{3} \sin(A-B) \\&= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(B-A)\end{aligned}$$

利用齐次化计算 $\sin(B-A)$:

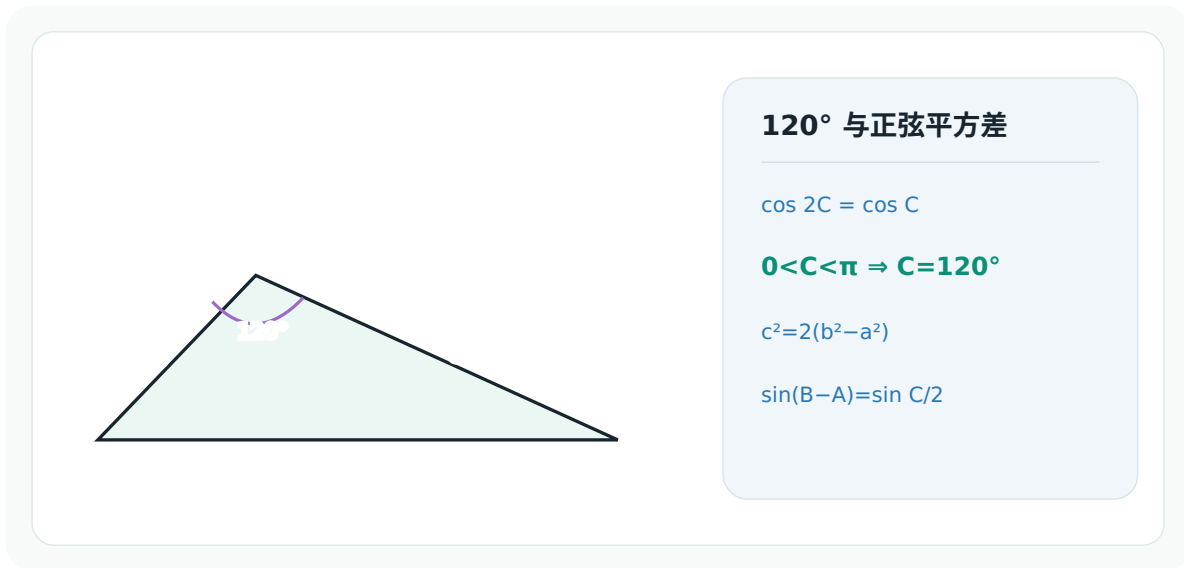
$$\begin{aligned}
& \frac{\sin(B-A)}{\sin(A+B)} \\
&= \frac{\sin B \cos A - \cos B \sin A}{\sin B \cos A + \cos A \sin B} \\
&= \frac{b \cos A - a \cos B}{b \cos A + a \cos B} \\
&= \frac{b \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - a \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{b \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + a \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}} \\
&= \frac{(b^2+c^2-a^2) - (a^2+c^2-b^2)}{(b^2+c^2-a^2) + (a^2+c^2-b^2)} \\
&= \frac{b^2-a^2}{c^2} \\
&= \frac{b^2-a^2}{2b^2-2a^2} \\
&= \frac{1}{2} \\
\sin(B-A) &= \frac{1}{2} \sin(A+B) = \frac{\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

回代目标式:

$$\begin{aligned}
& \cos 2A - \cos 2B \\
&= \sqrt{3} \sin(B-A) \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

回顾计算过程,我们发现了更简便的路径:

$$\begin{aligned}
c^2 &= 2b^2 - 2a^2 \\
\sin^2 C &= 2(\sin^2 B - \sin^2 A) \\
\sin^2 C &= 2 \sin(B+A) \sin(B-A) \\
\sin(B-A) &= \frac{\sin C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$



例题 8.3 的 120 度三角形示意图

8.2 三角形的特殊线

例题 8.4

题目来源：清华大学

已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且满足

$$b \cos C + (a + c)(b \sin C - 1) = 0, \quad a + c = \sqrt{3},$$

则

A. 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{16}$

B. 周长的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

C. $B = \frac{\pi}{3}$

D. $B = \frac{\pi}{4}$

初步观察,看似条件1不是关于边的齐次式,难以化成只含正弦的表达式. 实际上,结合条件2,可以通过常量代换的方式调整次数:

$$b \cos C + \sqrt{3}b \sin C = a + c$$

$$\sin B \cos C + \sqrt{3} \sin B \sin C = \sin A + \sin C$$

$$\sin B \cos C + \sqrt{3} \sin B \sin C = \sin(B + C) + \sin C$$

$$\sin B \cos C + \sqrt{3} \sin B \sin C = \sin B \cos C + \cos B \sin C + \sin C$$

$$\sin C(\cos B + 1 - \sqrt{3} \sin B) = 0$$

$$\sin C \neq 0$$

$$\sqrt{3} \sin B - \cos B = 1$$

$$2 \sin\left(B - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\sin\left(B - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$B - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ or } \frac{5\pi}{6}$$

$$B \in (0, \pi), B = \frac{\pi}{3}$$

接下来先考虑周长:

$$\begin{aligned}
\frac{a+b+c}{a+c} &= 1 + \frac{b}{a+c} \\
&= 1 + \frac{\sin B}{\sin A + \sin C} \\
&= 1 + \frac{\sin B}{2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2}} \\
&= 1 + \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{A-C}{2}} \\
&= 1 + \frac{1}{2 \cos \frac{A-C}{2}} \\
A+C &= \frac{2\pi}{3}, A-C \in \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \\
\cos(A-C) &\in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \\
\frac{a+b+c}{a+c} &\in \left[\frac{3}{2}, 2\right) \\
a+b+c &\in \left[\frac{3}{2}\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right)
\end{aligned}$$

然后考虑面积:

$$\begin{aligned}
S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}ac \sin B \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}ac \\
&= \frac{\sqrt{3}}{16}[(a+c)^2 - (a-c)^2] \leq \frac{\sqrt{3}}{16}(a+c)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{16}
\end{aligned}$$

正确答案:AC



例题 8.4 的定和面积最大值示意图

例题 8.5

题目来源：北京大学

已知某三角形的两条高的长度分别为 10 和 20，则它的第三条高的长度取值区间为

- A. $\left(\frac{10}{3}, 5\right)$
 B. $\left(5, \frac{20}{3}\right)$
 C. $\left(\frac{20}{3}, 20\right)$

D. 前三个答案都不对

不妨设三角形边 a, b 上的高为 10, 20, 边 c 上的高为 x :

$$10a = 20b = cx$$

$$x = \frac{10a}{c} = \frac{20b}{c}$$

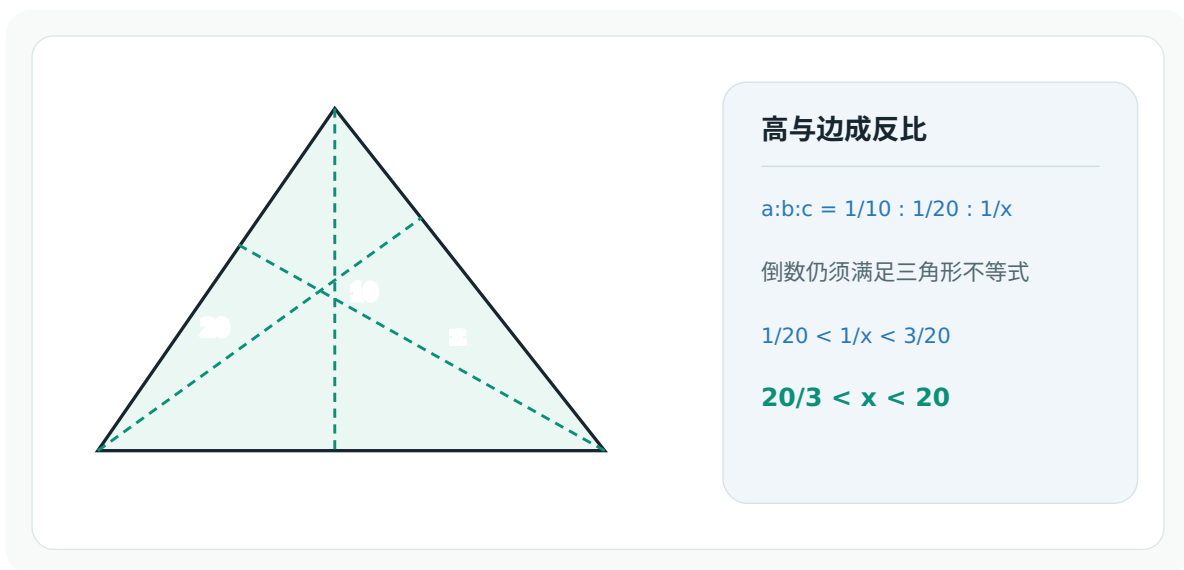
$$x = \frac{20(a+b)}{3c} > \frac{20}{3}$$

我们已经使用了 $a + b > c$, 这个边界条件.

为了满足三角形的边条件, 我们还需要利用 $b + c > a$ ($b < a$)

$$x = \frac{20(a-b)}{c} < 20$$

综上,答案选C



例题 8.5 的三条高与边长关系图

例题 8.6

题目来源：北京大学

在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 13$, $AC = 15$, $BC = 14$, AD 为边 BC 上的高, 则 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的内切圆圆心之间的距离为

- A. 2
- B. 3
- C. 5
- D. 前三个答案都不对

先计算BD,CD:

$$BD + CD = BC = 14$$

$$CD^2 - BD^2 = AC^2 - AB^2 = 56$$

$$CD - BD = 4$$

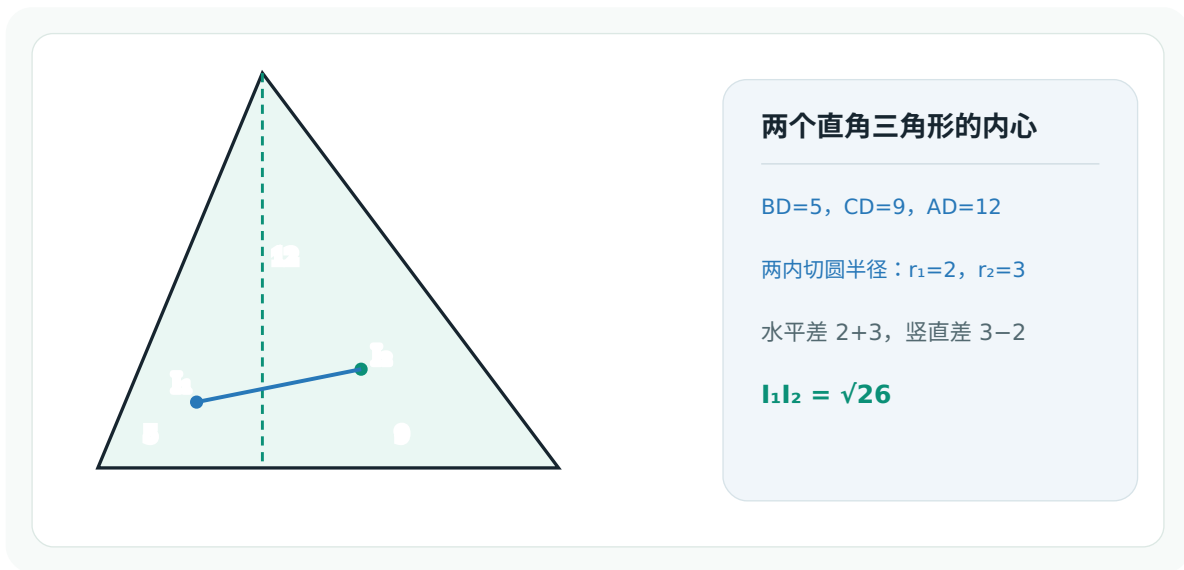
$$CD = 9, BD = 5$$

计算内切圆圆心到BC边的距离(这同时也是内切圆圆心到AD的距离):

$$\frac{5 + 12 - 13}{2} = 2, \frac{12 + 9 - 15}{2} = 3$$

因此,内切圆圆心距离为:

$$\sqrt{(3-2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{26}$$



例题 8.6 的两个直角三角形内心图

例题 8.7

题目来源: 北京大学

O 是凸四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 的交点。已知 $\triangle AOB$ 、 $\triangle BOC$ 、 $\triangle COD$ 、 $\triangle DOA$ 的周长相同, $\triangle AOB$ 、 $\triangle BOC$ 、 $\triangle COD$ 的内切圆半径分别为 3, 4, 6, 则 $\triangle DOA$ 的内切圆半径为

A. $\frac{9}{2}$

B. 5

C. $\frac{11}{2}$

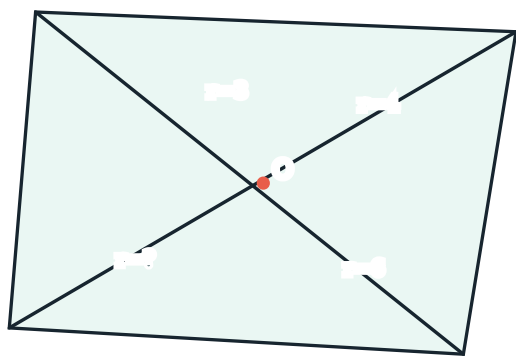
D. 前三个答案都不对

熟知三角形面积公式 $S = pr$, 因为四个三角形周长相等, 故 $\triangle AOB$ 、 $\triangle BOC$ 、 $\triangle COD$ 、 $\triangle DOA$ 面积比就等于内切圆半径比.

$$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{AO}{OC} = \frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COD}}$$

$$\frac{r_{\triangle AOB}}{r_{\triangle BOC}} = \frac{r_{\triangle AOD}}{r_{\triangle COD}}$$

$$r_{\triangle AOD} = \frac{9}{2}$$



等周长小三角形

同周长 $\Rightarrow S \propto r$

$$S_{\triangle AOB} / S_{\triangle BOC} = AO / OC$$

$$= S_{\triangle AOD} / S_{\triangle COD}$$

$$r_{\triangle AOD} = 3 \times 6 / 4 = 9/2$$

例题 8.7 的等周长小三角形图

8.3 三角形的特殊线

例题 8.8

题目来源：同济大学

在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2AC$, AD 是角 A 的角平分线, 且 $AD = kAC$ 。

1. 求 k 的取值范围;
2. 若 $S_{\triangle ABC} = 1$, 问 k 为何值时, BC 最短?

边

For 1:

我们回顾一下三角形内的斯特瓦尔特定理:

$$AD^2 = \frac{CD \cdot AB^2 + BD \cdot AC^2}{BC} - CD \cdot BD$$

设 $AC = x$, $AB = 2x$, $AD = kx$, $BC = y \in (x, 3x)$, 有:

$$\begin{aligned}
 AD^2 &= \frac{CD}{BC} \cdot AB^2 + \frac{BD}{BC} \cdot AC^2 - CD \cdot BD \\
 &= \frac{(2x)^2}{3} + \frac{2(x)^2}{3} - \frac{y}{3} \cdot \frac{2y}{3} \\
 &= 2x^2 - \frac{2y^2}{9} \in (0, \frac{16x^2}{9})
 \end{aligned}$$

于是, $AD = kx \in (0, \frac{4}{3}x)$, 即 $k \in (0, \frac{4}{3})$

For 2:

$$\begin{aligned}
 S_{\triangle ABC} &= \sqrt{p(p-x)(p-2x)(p-y)} = 1 \\
 \sqrt{(3x+y)(x+y)(y-x)(3x-y)} &= 4 \\
 \sqrt{(9x^2-y^2)(y^2-x^2)} &= 4 \\
 (9x^2-y^2)(y^2-x^2) &= 16 \\
 m = 9x^2 - y^2, n = y^2 - x^2 \\
 mn &= 16 \\
 y^2 = \frac{m+9n}{8} &\geq \frac{6\sqrt{mn}}{8} = 3 \\
 BC = y &\geq \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

根据取等条件, 可以解出 m, n 的值, 进而求出 x, k :

$$\begin{aligned}
 m = 9n, mn &= 16 \\
 m = 12, n &= \frac{4}{3} \\
 x^2 = \frac{m+n}{8} &= \frac{5}{3} \\
 k = \frac{AD}{x} &= \sqrt{2 - \frac{2y^2}{9x^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}
 \end{aligned}$$

角

For 1:

设 $AC = x, AB = 2x, AD = kx, \angle CAD = \angle BAC = \theta$, 有:

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}(x)(2x) \sin 2\theta \\ &= \frac{1}{2}(x)(kx) \sin \theta + \frac{1}{2}(kx)(2x) \sin \theta \\ k &= \frac{2 \sin 2\theta}{3 \sin \theta} = \frac{4}{3} \cos \theta \in (0, \frac{4}{3}) \end{aligned}$$

For 2:

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}(x)(2x) \sin 2\theta = 1 \\ BC^2 &= (x)^2 + (2x)^2 - 2(x)(2x) \cos \theta \\ &= 5x^2 - 4x^2 \cos 2\theta \\ &= (5 - 4 \cos 2\theta) \frac{1}{\sin 2\theta} \\ BC^2 \sin 2\theta &= 5 - 4 \cos 2\theta \\ BC^2 \sin 2\theta + 4 \cos 2\theta &= 5 \\ \sqrt{(BC^2)^2 + 4^2} &\leq 5 \\ BC^2 &\geq 3, BC \geq \sqrt{3} \end{aligned}$$

当 $BC = \sqrt{3}$ 时, $\sin 2\theta = \frac{3}{5}, \cos 2\theta = \frac{4}{5}$:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ k &= \frac{4}{3} \cos \theta = \frac{2\sqrt{10}}{5} \end{aligned}$$



例题 8.8 的角平分线长度与最短边示意图

例题 8.9

题目来源：2025 北京大学

在 $\triangle ABC$ 中， D 在 BC 上， AD 平分 $\angle BAC$ ， $AB = AD = 2$ ， $BD = 1$ ，求 CD 。

角

由于 $AB = AD$ ，设 $\angle BAD = 2\theta$ ， $\sin \theta = \frac{BD}{2AD} = \frac{1}{4}$ ， $\cos \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$ 。

在三角形 ADC 里使用正弦定理：

$$\begin{aligned} \frac{AD}{\sin(90 - 3\theta)} &= \frac{CD}{\sin 2\theta} \\ CD &= \frac{\sin 2\theta}{\cos 3\theta} AD \\ &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta} AD \\ &= \frac{2 \sin \theta}{4 \cos^2 \theta - 3} AD \\ &= \frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{15}{4} - 3} \cdot 2 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

边

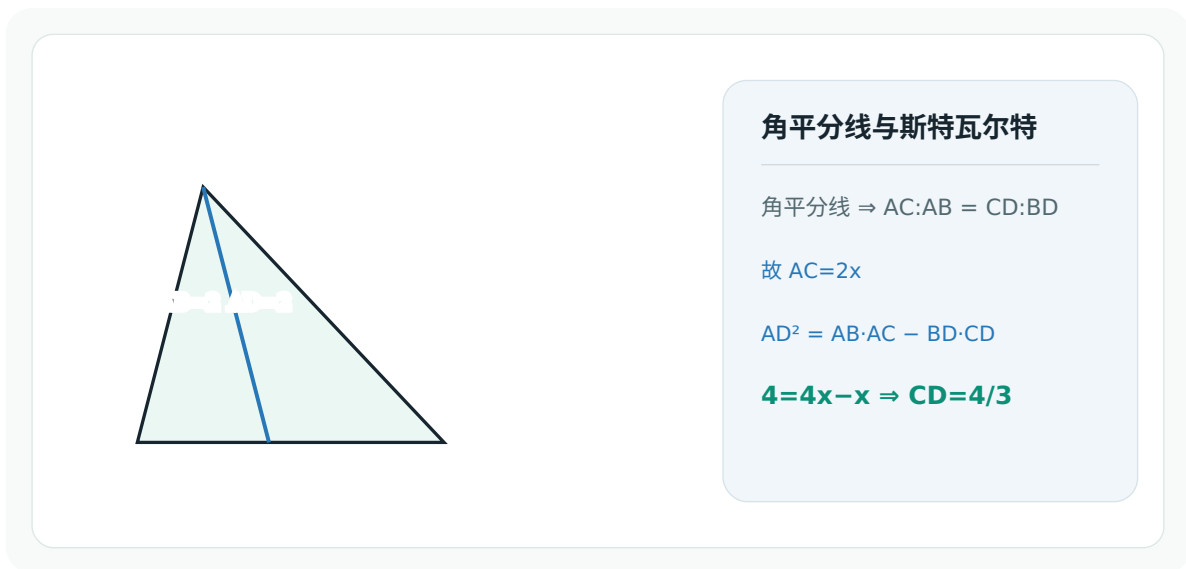
根据角平分线定理,设 $AC = 2x$, $CD = x$, 在三角形ABC中用斯特瓦尔特定理:

$$AD^2 = \frac{CD \cdot AB^2 + BD \cdot AC^2}{BC} - BD \cdot CD$$

$$2^2 = \frac{4x + 4x^2}{x + 1} - x$$

$$4 = 3x$$

$$x = \frac{4}{3}$$



例题 8.9 的角平分线与斯特瓦尔特定理示意图

例题 8.10

题目来源：北京大学

已知三角形三条中线的长度分别为 9, 12, 15, 则该三角形的面积为

- A. 69
- B. 72
- C. 75
- D. 前三个答案都不对

Lemma: 三角形三条中线可以构成三角形, 且新三角形和原三角形的面积比为 3 : 4.

回到本题, 则是:

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12}{S} = \frac{3}{4}$$

$$S = 72$$

关于这个引理,可以用向量给出证明:

$$\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$$

$$\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{BA})$$

$$\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB})$$

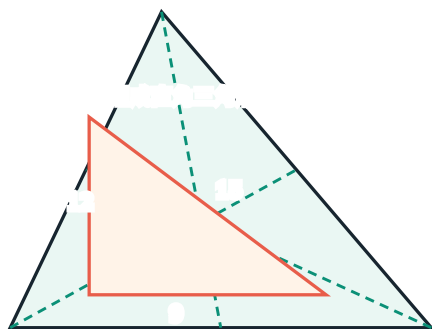
$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$S'_{\triangle} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$= \frac{1}{8}|(\vec{AB} + \vec{AC}) \times (\vec{AC} - 2\vec{AB})|$$

$$= \frac{3}{8}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{3}{4}S_{\triangle ABC}$$



中线三角形

$$9^2 + 12^2 = 15^2$$

$$\text{中线三角形面积} = 54$$

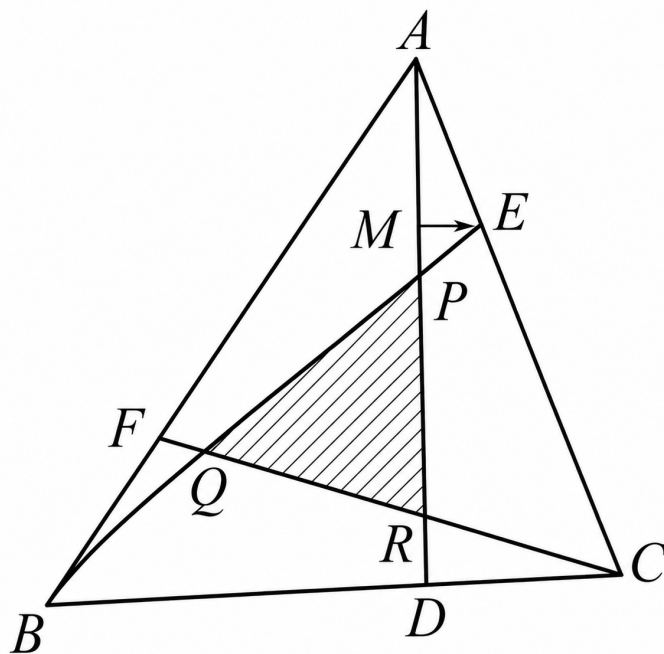
$$S_{\text{中线}} : S_{\text{原}} = 3 : 4$$

$$S_{\text{原}} = 72$$

例题 8.10 的中线三角形示意图

:例题 8.11

如图, 点 D, E, F 分别是 $\triangle ABC$ 三边 BC, AC, AB 上的三等分点, $EC = 2AE$, $BD = 2CD$, $AF = 2BF$ 。若 $S_{\triangle ABC} = 1$, 求 $S_{\triangle PQR}$ 。



例题 8.11 的原 PDF 几何示意图

此题需要大量使用梅涅劳斯定理求线段比:

$$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

$$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

$$\frac{AP}{PD} = \frac{3}{4}, AP = \frac{3}{7}AD$$

$$\frac{AR}{RD} \cdot \frac{DC}{CB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1$$

$$\frac{AR}{RD} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{AR}{RD} = 6, RD = \frac{1}{7}AD$$

$$DR : RP : PA = 1 : 3 : 3$$

同理, 根据图形对称性有:

$$\frac{RP}{RA} = \frac{1}{2}, \frac{RQ}{RF} = \frac{3}{4}$$

于是,线段的比例已知,我们得以大展拳脚:

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle AFR}} = \frac{RP}{RA} \cdot \frac{RQ}{RF} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{S_{\triangle AFR}}{S_{\triangle ACF}} = \frac{RF}{FC} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AF}{AB} = \frac{2}{3}$$

$$S_{\triangle PQR} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{7}$$

当然,此题同样可以用平面向量共线定理解决,请读者自证.



例题 8.11 的三等分点与塞瓦线示意图

例题 8.12

题目来源：北京大学

求证：边长为 1 的正五边形的对角线长为 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 。

易知对角线长: $2 \sin \frac{3\pi}{10} = 2 \cos \frac{\pi}{5}$

已知: $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

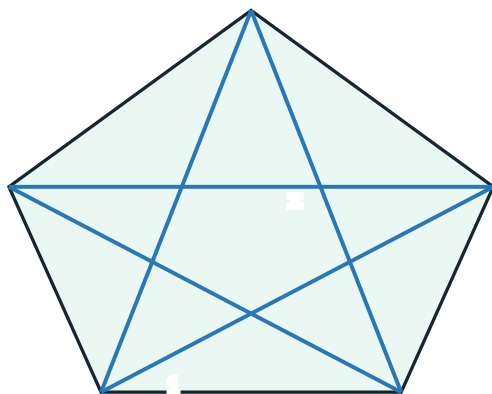
故: $\cos \frac{\pi}{5} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

更有趣味的解法:托勒密定理

在五边形顶点中任选4点,用托勒密定理:

$$x^2 = x + 1 (x > 0)$$

$$x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$



正五边形与托勒密

取四个相邻顶点组成圆内接四边形

托勒密: $x^2 = x + 1$

$x > 0$

$x = (\sqrt{5} + 1)/2$

例题 8.12 的正五边形托勒密示意图

例题 8.13

题目来源: 北京大学

在圆内接四边形 $ABCD$ 中, $BD = 6$, $\angle ABD = \angle CBD = 30^\circ$, 则四边形 $ABCD$ 的面积等于

A. $8\sqrt{3}$

B. $9\sqrt{3}$

C. $12\sqrt{3}$

D. 前三个答案都不对

因为 $\angle ABD = \angle CBD$, 故 $\angle ADC = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$, $AD = CD = m$, $AC = \sqrt{3}m$.

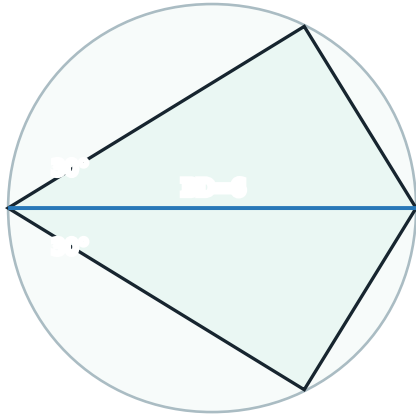
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD(AB + AC) \sin 30^\circ = \frac{3}{2}(AB + AC)$$

再考虑托勒密定理:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

$$AB + BC = \sqrt{3}BD = 6\sqrt{3}$$

$$S_{ABCD} = 9\sqrt{3}$$



圆内接四边形面积

等圆周角 $\Rightarrow AD=CD$

托勒密: $AB+BC = \sqrt{3} \cdot BD$

$S = \frac{1}{2}BD(AB+BC)\sin 30^\circ$

$$S = 9\sqrt{3}$$

例题 8.13 的圆内接四边形面积示意图

例题 8.14

题目来源：北京大学

在圆周上逆时针依次取 4 个点 A, B, C, D ，已知 $BA = 1$ ， $BC = 2$ ， $BD = 3$ ， $\angle ABD = \angle DBC$ ，则该圆的直径为

- A. $2\sqrt{5}$
- B. $2\sqrt{6}$
- C. $2\sqrt{7}$
- D. 前三个答案都不对

看到圆内角平分线,我们故技重施,用托勒密定理:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AC$$

$$AD = DC$$

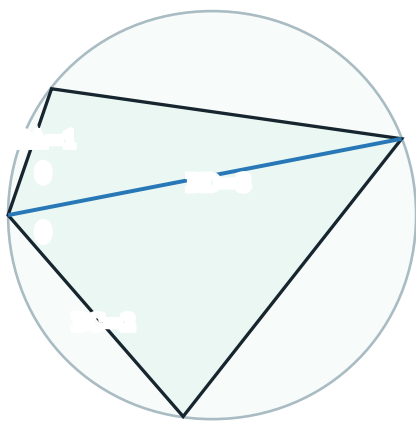
$$\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{AB + BC} = 1$$

$$\angle ADC = 60^\circ$$

$$\angle ABC = 120^\circ$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC} = \sqrt{7}$$

$$d = \frac{m}{\sin \angle ABC} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$



圆周角平分线

$$\angle ABD = \angle DBC \Rightarrow AD = DC$$

$$\text{托勒密} \Rightarrow AD/AC = BD/(AB + BC) = 1$$

$$\text{故 } \angle ADC = 60^\circ, AC = \sqrt{7}$$

$$\text{直径} = 2\sqrt{21}/3 \text{ (选 D)}$$

例题 8.14 的圆周角平分线示意图

例题 8.15

题目来源：北京大学

在凸四边形 $ABCD$ 中， $BC = 4$ ， $\angle ADC = 60^\circ$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ，四边形 $ABCD$ 的面积等于

$$\frac{AB \cdot CD + BC \cdot AD}{2},$$

则 CD 的长（精确到小数点后 1 位）为

A. 6.9

B. 7.1

C. 7.3

D. 前三个答案都不对

四边形面积是对边乘积的一半,这提醒我们使用托勒密定理:

$$S_{ABCD} \leq \frac{1}{2} AC \cdot BD \leq \frac{AB \cdot CD + BC \cdot AD}{2}$$

这表明所有等号都成立,即 $BC \perp AD$, A, B, C, D 四点共圆.

根据图形对称性,有:

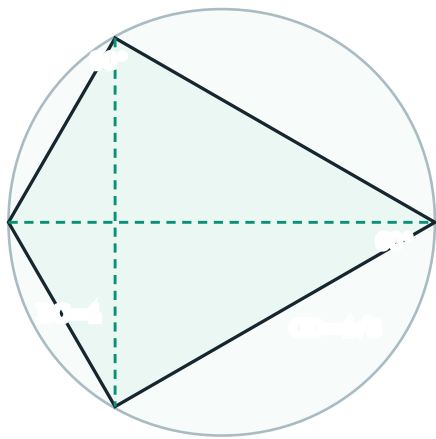
$$AB = BC = 4, AD = DC$$

根据角度求边:

$$\angle ABC = 120^\circ$$

$$\angle DBC = 60^\circ$$

$$CD = \tan 60^\circ BC = 4\sqrt{3} \approx 6.9$$



面积等号锁定共圆

面积上界与托勒密上界同时取等

$\Rightarrow AC \perp BD$ 且 A, B, C, D 共圆

于是 $AB = BC = 4, AD = DC$

$CD = 4 \tan 60^\circ = 4\sqrt{3} \approx 6.9$

例题 8.15 的面积等号与共圆示意图

8.4 平面几何中的变换

例题 8.16

题目来源：北京大学

已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, P_1, P_2, P_3, P_4 是正方形内部的 4 个点, 使得 $\triangle ABP_1$ 、 $\triangle BCP_2$ 、 $\triangle CDP_3$ 和 $\triangle DAP_4$ 都是正三角形, 则四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的面积等于

A. $2 - \sqrt{3}$

B. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

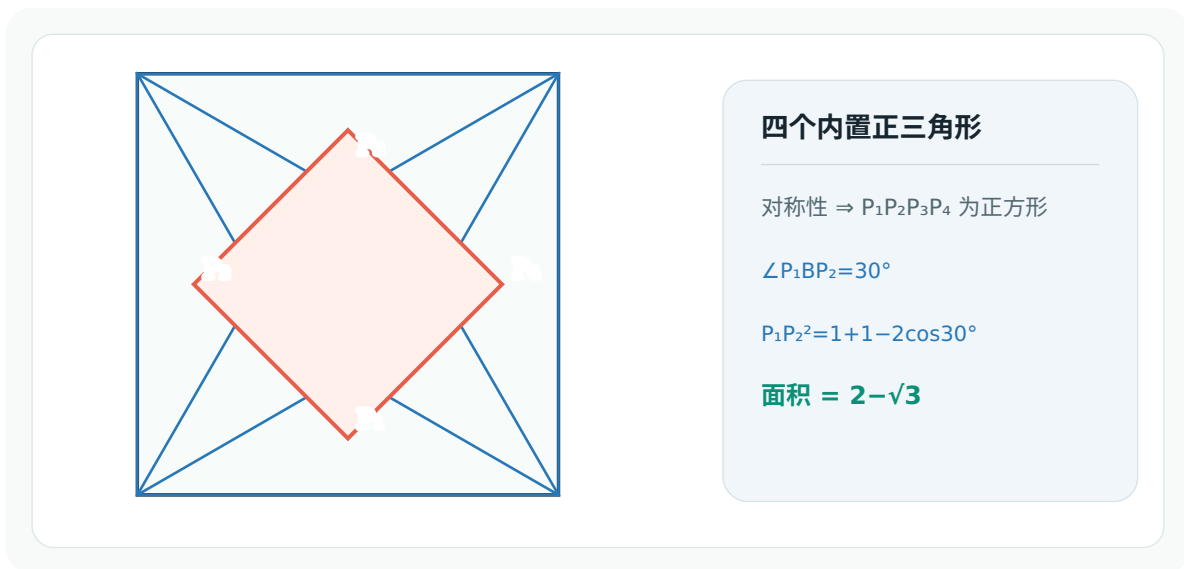
C. $\frac{1 + \sqrt{3}}{8}$

D. 前三个答案都不对

根据对称性, 显然四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 为正方形, 故:

$$S_{P_1P_2P_3P_4} = P_1P_2^2$$

$$P_1P_2^2 = BP_2^2 + BP_1^2 - 2BP_1BP_2 \cos 30^\circ = 2 - \sqrt{3}$$



例题 8.16 的四个内置正三角形示意图

例题 8.17

题目来源: 北京大学

正方形 $ABCD$ 与点 P 在同一平面内。已知该正方形的边长为 1, 且

$$|PA|^2 + |PB|^2 = |PC|^2,$$

则 $|PD|$ 的最大值为

A. $2 + \sqrt{2}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $1 + \sqrt{2}$

D. 前三个答案都不对

Lemma: $|PA|^2 + |PC|^2 = |PD|^2 + |PB|^2$

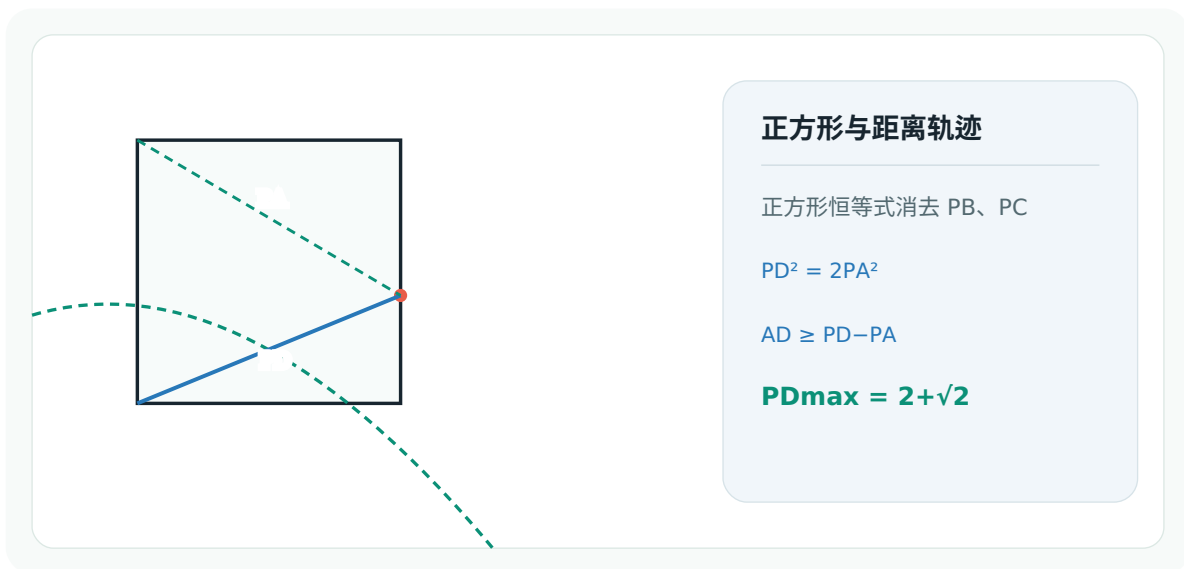
于是消去PB,PC得:

$$2|PA|^2 = |PD|^2$$

$$\sqrt{2}|PA| = |PD|$$

$$1 = AD \geq |PD| - |PA| = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}|PD|$$

$$|PD| \leq 2 + \sqrt{2}$$



例题 8.17 的正方形距离轨迹示意图

例题 8.18

题目来源：上海交通大学

设 a, b, c 表示三角形三边长，均为整数，且 $a \leq b \leq c$ 。若 $b = n$ (n 为正整数)，则可组成这样的三角形 _____ 个。

长度分别为 $a \leq b \leq c$ 的边能构成三角形的充要条件:

$$a + b > c$$

那么固定 a , 考察 c 的可能情况数:

$$a = 1, c = n$$

$$a = 2, c = n, n + 1$$

$$a = 3, c = n, n + 1, n + 2$$

...

$$a = n, c = n, n + 1, \dots, 2n - 2, 2n - 1$$

总情况数: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$



例题 8.18 的整数边计数示意图