

[2027强基计划]复数

整理《2027强基计划》数学讲义第7章复数，涵盖复数运算、复数乘法与平面旋转、单位根及其应用、复数轨迹与几何应用中的28道例题。

2026年8月4日 · 数学 · 强基计划 · 复数

第 7 章 复数

7.1 复数的表示与运算

例题 7.1

题目来源：清华大学

设复数 z 满足 $|z| < 1$ ，且

$$\left| \bar{z} + \frac{1}{z} \right| = \frac{5}{2},$$

则 $|z| =$

A. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

解答

利用 $z\bar{z} = |z|^2$ ，得：

$$\begin{aligned}
 & \left| \bar{z} + \frac{1}{z} \right|^2 \\
 &= \left(\bar{z} + \frac{1}{z} \right) \left(z + \frac{1}{\bar{z}} \right) \\
 &= \bar{z}z + \frac{1}{\bar{z}z} + 2 = \frac{25}{4} \\
 & \frac{1}{|z|^2} + |z|^2 = \frac{17}{4} \\
 & \implies |z| = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

正确答案为D.

例题 7.2

题目来源：北京大学

模长为 1 的复数 x, y, z 满足 $x + y + z \neq 0$, 求

$$\left| \frac{xy + yz + zx}{x + y + z} \right|.$$

解答

仍然利用 $z\bar{z} = |z|^2$:

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{xy + yz + zx}{x + y + z} \right|^2 \\
 &= \frac{xy + yz + zx}{x + y + z} \cdot \frac{\overline{xy + yz + zx}}{\overline{x + y + z}} \\
 &= \frac{xy + yz + zx}{x + y + z} \cdot \frac{\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \\
 &= \frac{xy + yz + zx}{x + y + z} \cdot \frac{x + y + z}{xy + yz + zx} = 1 \\
 & \implies \left| \frac{xy + yz + zx}{x + y + z} \right| = 1
 \end{aligned}$$

例题 7.3

题目来源：清华大学

求最小正整数 n , 使得

$$I = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i \right)^n$$

为纯虚数，并求出 I 。

解答

面对高次指数,最好使用复数的三角形式:

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i \right)^n \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)^n \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^n (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^n \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^n [\cos(30n^\circ) + i \sin(30n^\circ)] \\ \Re(I) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^n \cos(30n^\circ) = 0 \\ n &\geq 3 \end{aligned}$$

例题 7.4

题目来源：复旦大学

设 z_1, z_2 为一对共轭复数。如果 $|z_1 - z_2| = \sqrt{6}$, 且 $\frac{z_1}{z_2}$ 为实数, 那么 $|z_1| = |z_2| =$

- A. $\sqrt{2}$
- B. 2
- C. 3
- D. $\sqrt{6}$

解答

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(z_2 - z_1) \\ &= -(z_1 - z_2)^2 = 6 \\ \implies z_1 - z_2 &= \pm\sqrt{6}i \\ 2\Im(z_1) &= \pm\sqrt{6} \end{aligned}$$

或者直接有 $|z_1 - z_2| = |2\Im(z_1)| = \sqrt{6} \implies 2\Im(z_1) = \pm\sqrt{6}$.

$$\begin{aligned}
& \frac{z_1}{z_2^2} \in \mathbb{R} \\
& \iff \frac{z_1}{z_2^2} = \frac{z_2}{z_1^2} \\
& \frac{z_1}{z_2^2} - \frac{z_2}{z_1^2} \\
& = \frac{z_1^3 - z_2^3}{(z_1 z_2)^2} = 0 \\
& \implies z_1^3 - z_2^3 = (z_1 - z_2)(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2) = 0 (z_1 \neq z_2) \\
& z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2 = 0 \\
& (z_1 - z_2)^2 + 3z_1 z_2 = 0 \\
& -6 + 3z_1 z_2 = 0 \\
& 3|z_1|^2 = 6, |z_2| = |z_1| = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

可见,求出虚部并不是必须的步骤,可以利用 $(z_1 - z_2)^2$ 这一上位的代数关系进行化简求值.

此外,三角换元面对复数的乘除法不失为良策:

$$\begin{aligned}
z_1 &= r(\cos \theta + i \sin \theta), z_2 = r[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)] \\
\frac{z_1}{z_2^2} &= \frac{1}{r}(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) \in \mathbb{R} \\
\sin 3\theta &= 0 \implies \theta = \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}) \\
|z_1 - z_2| &= 2|r \sin \theta| = \begin{cases} 0, \sin \theta = 0 \\ \sqrt{3}|r|, \sin \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} = \sqrt{6} \\
&\implies |r| = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

正确答案:A

例题 7.5

设 z 是模为 1 的复数, 则函数

$$f(z) = z^2 + \frac{1}{z^2} + 1$$

的最小值是 _____。

解答

复变函数严格意义上没有最小值的概念,但是这道题暗含着 $f(z) \in \mathbb{R}$,所以有最值.

$$\begin{aligned}
 f(z) &= z^2 + \frac{(z\bar{z})^2}{z^2} + 1 \\
 &= z^2 + \bar{z}^2 + 1 \\
 &= 2[\Re(z)^2 - \Im(z)^2] + 1 \geq 2(0 - 1) + 1 = -1
 \end{aligned}$$

指数(三角)形式更为简便:

$$\begin{aligned}
 z &= e^{i\theta} \\
 f(z) &= (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + 1 \\
 &= 2\cos 2\theta + 1 \geq -1
 \end{aligned}$$

7.2 复数乘法与平面旋转

例题 7.6

题目来源：上海交通大学

已知 $|z| = 1$, k 是实数, z 是复数, 求

$$|z^2 + kz + 1|$$

的最大值。

解答

首先需要明确的是, k 应该是一个给定的值, 否则 $k \rightarrow \infty$, $|z^2 + kz + 1| \rightarrow \infty$

对于复数模长问题, 我们驾轻就熟:

$$\begin{aligned}
& |z^2 + kz + 1|^2 \\
&= (z^2 + kz + 1)(\bar{z}^2 + k\bar{z} + 1) \\
&= (z\bar{z})^2 + k^2(z\bar{z}) + 1 \\
&\quad + kz\bar{z}(z + \bar{z}) + (z^2 + \bar{z}^2) + k(z + \bar{z}) \\
&= 1 + k^2 + 1 + 2k\Re(z) + 2[\Re(z)^2 - \Im(z)^2] + 2k\Re(z) \\
&= k^2 + 4\Re(z)k + 2[\Re(z)^2 - \Im(z)^2 + 1] \\
&= k^2 + 4\Re(z)k + 4\Re(z)^2 \\
&= [k + 2\Re(z)]^2 \\
&= \max\{(k - 2)^2, (k + 2)^2\} \\
&= \begin{cases} (k + 2)^2, & k \geq 0 \\ (k - 2)^2, & k < 0 \end{cases} \\
|z^2 + kz + 1| &= \begin{cases} k + 2, & k \geq 0 \\ 2 - k, & k < 0 \end{cases} = 2 + |k|
\end{aligned}$$

事实上,守前所为而已并非最佳选项:

$$\begin{aligned}
& |z^2 + kz + 1| \\
&= |z| \left| z + k + \frac{1}{z} \right| \\
&= \left| z + k + \frac{1}{z} \right| \\
&= |2\cos\theta + k| \leq |k| + 2
\end{aligned}$$

例题 7.7

题目来源: 复旦大学

已知 $|z| = 1$, 求

$$|z^2 + z + 4|$$

的最小值。

解答

$$\begin{aligned}
& |z^2 + z + 4|^2 \\
&= (z^2 + z + 4)(\bar{z}^2 + \bar{z} + 4) \\
&= (z\bar{z})^2 + (z\bar{z}) + 16 \\
&\quad + z\bar{z}(z + \bar{z}) + 4(z^2 + \bar{z}^2) + 4(z + \bar{z}) \\
&= 1 + 1 + 16 + 2\Re(z) + 8[\Re(z)^2 - \Im(z)^2] + 8\Re(z) \\
&= 16\Re(z)^2 + 10\Re(z) + 10 \geq \frac{135}{16} \\
&|z^2 + z + 4| \geq \frac{3\sqrt{15}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& |z^2 + z + 4| \\
&= \left| z + 1 + \frac{4}{z} \right| \\
&= |1 + \cos \theta + i \sin \theta + 4(\cos \theta - i \sin \theta)| \\
&= |1 + 5 \cos \theta - 3i \sin \theta| \\
&= \sqrt{(5 \cos \theta + 1)^2 + 9 \sin^2 \theta} \\
&= \sqrt{16 \cos^2 \theta + 10 \cos \theta + 10} \geq \frac{3\sqrt{15}}{4}
\end{aligned}$$

圣人无常师,做题亦无常法,两种方法此时难分伯仲,不再是三角(指数)形式更加简便了,核心在于虚部无法相消.

例题 7.8

题目来源：清华大学

若复数 z 满足 $|z^2 + 1| = |z|$, 则

- A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$
- B. $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq |z| \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$
- C. $\arg z \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$
- D. $\arg z \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$

解答

$$\begin{aligned}
|z^2 + 1| &= |z|(z \neq 0) \\
&\iff \left|z + \frac{1}{z}\right| = 1 \\
\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) &= 1^2 \\
(z^2 + 1)(\bar{z}^2 + 1) &= z\bar{z} \\
(z\bar{z})^2 + z^2 + \bar{z}^2 + 1 &= |z|^2 \\
|z|^4 + 2[\Re(z)^2 - \Im(z)^2] + 1 &= |z|^2 \\
|z|^4 - |z|^2 + 1 &= -2[\Re(z)^2 - \Im(z)^2] \in [-2|z|^2, 2|z|^2]
\end{aligned}$$

不等式 $|z|^4 - |z|^2 + 1 \geq -2|z|^2$ 显然成立,而:

$$|z|^4 - |z|^2 + 1 \leq 2|z|^2$$

给出 $|z|^2 \in [\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}]$, 即 $|z| \in [\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}]$ 。

事实上,虽然我们没有使用复数的三角形式,但是辐角主值近在咫尺:

$$\begin{aligned}
&|z|^4 - |z|^2 + 1 + 2[\Re(z)^2 - \Im(z)^2] \\
&= |z|^2\left[|z|^2 - 1 + \frac{1}{|z|^2} + 2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\right] \\
&|z|^2 - 1 + \frac{1}{|z|^2} + 2 \cos 2\theta = 0 \\
&|z|^2 - 1 + \frac{1}{|z|^2} \in [1, 2] \\
&\cos 2\theta \in [-1, -\frac{1}{2}] \\
&\theta \in [0, 2\pi) \\
&2\theta \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}] \cup [\frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}] \\
&\theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]
\end{aligned}$$

正确答案:AC

例题 7.9

题目来源: 复旦大学

已知复数

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_2 = -\sqrt{3} + \sqrt{3}i,$$

则复数 $z_1 z_2$ 的辐角是

- A. $\frac{13\pi}{12}$
- B. $\frac{11\pi}{12}$
- C. $-\frac{\pi}{4}$
- D. $-\frac{7\pi}{12}$

解答

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \\ z_2 &= \sqrt{6}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \\ \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} &= \frac{13\pi}{12} \end{aligned}$$

正确答案:A

例题 7.10

题目来源：复旦大学

给定平面向量 $(1, 1)$ ，则平面向量

$$\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)$$

是将向量 $(1, 1)$ 经过

- A. 顺时针旋转 60° 所得
- B. 顺时针旋转 120° 所得
- C. 逆时针旋转 60° 所得
- D. 逆时针旋转 120° 所得

解答

$$\begin{aligned}
 z_1 &= 1 + i \\
 z_2 &= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i \\
 \frac{z_2}{z_1} &= \frac{\frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i}{1 + i} \\
 &= \frac{\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i\right)(1 - i)}{2} \\
 &= \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ
 \end{aligned}$$

正确答案:C

7.3 单位根及其应用

例题 7.11

已知对任意平面向量 $\overrightarrow{AB} = (x, y)$, 把 $\overrightarrow{AB}$ 绕其起点沿逆时针方向旋转 θ 角得到向量

$$\overrightarrow{AP} = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta),$$

叫做把点 B 绕点 A 沿逆时针方向旋转 θ 角得到点 P 。已知平面内点 $A(1, 2)$, 点 $B(1 + \sqrt{2}, 2 - 2\sqrt{2})$, 把点 B 绕点 A 沿顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后得到点 P , 求点 P 的坐标。

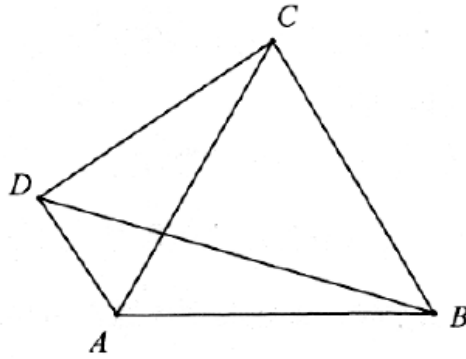
解答

$$\begin{aligned}
 z_1 &= 1 + 2i, z_2 = (1 + \sqrt{2}) + (2 - 2\sqrt{2})i \\
 z_3 &= z_1 + (z_2 - z_1) \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \\
 &= 1 + 2i + (\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\
 &= 1 + 2i + (-1 - 3i) = -i \\
 &\implies P(0, -1)
 \end{aligned}$$

例题 7.12

如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AD = 1$, $CD = 2$, $\triangle ABC$ 为等边三角形, 记 $\angle ADC = \alpha$ 。

1. 若 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, 求 $\triangle ABD$ 的面积;
2. 若 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 求 $\triangle ABD$ 的面积取值范围。



例题 7.12 的原 PDF 几何示意图

解答

事实上,这道题应该先完成(II):

以 D 为原点, AD 方向为 x 轴,垂直 AD 方向为 y 轴,建立平面直角坐标系 xDy

$$\begin{aligned}
 & D(0, 0), A(1, 0), C(2 \cos \alpha, 2 \sin \alpha) \\
 & z_1 = 1, z_2 = 2 \cos \alpha + 2i \sin \alpha \\
 & z_3 = z_1 + (z_2 - z_1) \left(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3} \right) \\
 & = 1 + [(2 \cos \alpha - 1) + 2i \sin \alpha] \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\
 & = 1 + \left\{ \left[\frac{2 \cos \alpha - 1}{2} + \sqrt{3} \sin \alpha \right] + \left[\sin \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} (2 \cos \alpha - 1) \right] i \right\}
 \end{aligned}$$

事实上,我们只关心 z_3 虚部的绝对值(也就是 B 点到 AD 的距离):

$$\begin{aligned}
\Im(z_3) &= \sin \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}(2 \cos \alpha - 1) \\
&= \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= 2 \sin(\alpha - \frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\alpha &\in (\frac{\pi}{2}, \pi), \alpha - \frac{\pi}{3} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}) \\
\sin(\alpha - \frac{\pi}{3}) &\in (\frac{1}{2}, 1] \\
h = |\Im(z_3)| &\in (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}] \\
S_{\triangle ABD}(\alpha) &= \frac{1}{2}AD \cdot h = \sin(\alpha - \frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{4} \in (\frac{\sqrt{3}+2}{4}, \frac{\sqrt{3}+4}{4}] \\
S_{\triangle ABD}(\frac{\pi}{3}) &= \frac{\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

例题 7.13

题目来源：复旦大学

已知数 x 满足

$$x + \frac{1}{x} = -1,$$

求

$$x^{300} + \frac{1}{x^{300}}$$

的值。

解答

显然,对于实数 $x \in \mathbb{R}$, $x + \frac{1}{x} \neq -1$,故 $x \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
 x &= r(\cos \theta + i \sin \theta), r > 0, \sin \theta \neq 0 \\
 x + \frac{1}{x} &= (r \cos \theta + \frac{1}{r} \cos \theta) + (r \sin \theta - \frac{1}{r} \sin \theta) = -1 \\
 &\implies r - \frac{1}{r} = 0, r = +1 \\
 2 \cos \theta &= -1, \cos \theta = -\frac{1}{2} \\
 \theta &= \frac{2\pi}{3} \text{ or } \frac{4\pi}{3} \\
 x^{300} + \frac{1}{x^{300}} &= 2 \cos(300\theta) = +2
 \end{aligned}$$

或者考虑单位根:

$$\begin{aligned}
 x^2 + x + 1 &= 0 \\
 x^3 - 1 &= (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \\
 x^{3n} &= (x^3)^n = 1 \\
 x^{300} + \frac{1}{x^{300}} &= 1 + 1 = 2
 \end{aligned}$$

例题 7.14

题目来源：2026 北京大学

已知复数 z 满足 $z^5 = \bar{z}$, 则满足该方程的复数 z 的个数为 _____。

解答

$$\begin{aligned}
 |z^5| &= |\bar{z}| \\
 |z|^5 &= |z| \implies |z| = 1 \text{ or } 0 \\
 |z| &= 0 \implies z = 0 \\
 |z| &= 1 \implies z^5 = \frac{1}{z}, z^6 = 1
 \end{aligned}$$

总之, z 要么是0,要么是六次单位根,有7种可能

例题 7.15

题目来源：上海交通大学

设方程 $x^3 = 1$ 的一个虚数根为 ω , 则

$$\omega^{2n} + \omega^n + 1 = \underline{\hspace{2cm}},$$

其中 n 是正整数。

$$\begin{aligned}\omega^3 - 1 &= (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0 (\omega \neq 1) \\ \omega^2 + \omega + 1 &= 0 \\ \omega^{2n} + \omega^n + 1 &= \begin{cases} \omega^2 + \omega + 1 = 0, n \equiv 1(mod 3) \\ \omega^2 + \omega + 1 = 0, n \equiv 2(mod 3) \\ 3, n \equiv 0(mod 3) \end{cases}\end{aligned}$$

解答

例题 7.16

题目来源：清华大学

设

$$(1 + x + x^2)^{10}$$

的展开式为 $a_0 + a_1x + \cdots + a_{20}x^{20}$ ，则

$$\sum_{k=0}^6 a_{3k} =$$

A. 3^9

B. 3^{10}

C. 2^{19}

D. 2^{20}

解答

有例7.15为鉴,可知单位根有"筛选"的功能,我们利用之:

$$\begin{aligned}
 & \omega^2 + \omega + 1 = 0 \\
 & (1 + \omega + \omega^2)^{10} = a_0 + a_1\omega + \cdots + a_{20}\omega^{20} \\
 & = (a_0 + a_3 + a_6 + \cdots + a_{18}) + (a_1 + a_4 + a_7 + \cdots + a_{19})\omega + (a_2 + a_5 + a_8 + \cdots + a_{20})\omega^2 \\
 & \quad = 0 \\
 & (1 + \omega^2 + \omega^4)^{10} = a_0 + a_1\omega^2 + \cdots + a_{20}\omega^{40} \\
 & = (a_0 + a_3 + a_6 + \cdots + a_{18}) + (a_1 + a_4 + a_7 + \cdots + a_{19})\omega^2 + (a_2 + a_5 + a_8 + \cdots + a_{20})\omega \\
 & \quad = 0 \\
 & (1 + \omega^3 + \omega^6)^{10} = a_0 + a_1\omega^3 + \cdots + a_{20}\omega^{60} \\
 & = (a_0 + a_3 + a_6 + \cdots + a_{18}) + (a_1 + a_4 + a_7 + \cdots + a_{19}) + (a_2 + a_5 + a_8 + \cdots + a_{20}) \\
 & \quad = 3^{10}
 \end{aligned}$$

联立三个式子(三个式子相加),恰好得到 $3x = 3^{10}$,然后可以解出三个括号 x, y, z 的值:

$$\begin{cases} x + y\omega + z\omega^2 = 0, \\ x + y\omega^2 + z\omega = 0, \\ x + y + z = 3^{10} \end{cases} \implies x = y = z = 3^9$$

正确答案:A

例题 7.17

题目来源: 上海交通大学

ω 是方程 $x^5 = 1$ 的一个非实数根, 则

$$\omega(\omega + 1)(\omega^2 + 1) = \text{_____}.$$

解答

$$\begin{aligned}
 & \omega(\omega + 1)(\omega^2 + 1) \\
 & = (\omega^2 + \omega)(\omega^2 + 1) \\
 & = \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega \\
 & = \frac{\omega^5 - \omega}{\omega - 1} (\omega \neq 1) \\
 & = \frac{1 - \omega}{\omega - 1} = -1
 \end{aligned}$$

例题 7.18

题目来源: 清华大学

求

$$2 + 2e^{0.4\pi i} + e^{1.2\pi i}$$

的模。

解答

换元重复出现的部分:

$$\begin{aligned}\omega &= e^{\frac{2\pi}{5}i} \\ \omega^5 &= e^{2\pi i} = 1 \\ |2 + 2e^{0.4\pi i} + e^{1.2\pi i}|^2 &= (2 + 2\omega + \omega^3)(2 + 2\bar{\omega} + \bar{\omega}^3) \\ &= 4 + 4\omega\bar{\omega} + \omega\bar{\omega}^3 \\ &\quad + 4(\omega + \bar{\omega}) + 2(\omega^3 + \bar{\omega}^3) + 2\omega\bar{\omega}(\omega^2 + \bar{\omega}^2) \\ &= 4 + 4 + 1 + 4(\omega + \omega^4) + 2(\omega^3 + \omega^2) + 2(\omega^2 + \omega^3) \\ &= 9 + 4(\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4) \\ &= 9 + 4\frac{\omega^5 - \omega}{\omega - 1} (\omega \neq 1) \\ &= 9 - 4 = 5\end{aligned}$$

例题 7.19

题目来源：清华大学

设

$$w = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}, \quad P(x) = x^2 + x + 2,$$

则

$$P(w)P(w^2)P(w^3)P(w^4) =$$

A. 9

B. 10

C. 11

D. 12

解答

这道题需要一个"分解+重装"的小技巧:

$$\begin{aligned}
 x^2 + x + 2 &= (x - \alpha)(x - \beta) \\
 \begin{cases} \alpha + \beta = -1, \\ \alpha\beta = 2 \end{cases} \\
 \Phi(x) &= x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \prod_{k=1}^4 (x - \omega^k) = \prod_{k=1}^4 (\omega^k - x) \\
 &= \prod_{k=1}^4 [(\omega^k)^2 + (\omega^k) + 2] \\
 &= \prod_{k=1}^4 (\omega^k - \alpha)(\omega^k - \beta) \\
 &= \prod_{k=1}^4 (\omega^k - \alpha) \prod_{k=1}^4 (\omega^k - \beta) \\
 &= \Phi(\alpha)\Phi(\beta)
 \end{aligned}$$

接下来,我们利用 α, β 是方程 $x^2 + x + 2 = 0$ 的根进行降次:

$$\begin{aligned}
 x^2 &= -x - 2 \\
 x^3 &= x^2 \cdot x = (-x - 2)x \\
 &= -x^2 - 2x = -x + 2 \\
 x^4 &= (x^2)^2 = (-x - 2)^2 \\
 &= x^2 + 4x + 4 \\
 &= 3x + 2 \\
 \Phi(x) &= (3x + 2) + (-x + 2) + (-x - 2) + x + 1 \\
 &= 2x + 3
 \end{aligned}$$

化简 $\Phi(\alpha)\Phi(\beta)$:

$$\begin{aligned}
 &\Phi(\alpha)\Phi(\beta) \\
 &= (2\alpha + 3)(2\beta + 3) \\
 &= 4\alpha\beta + 6(\alpha + \beta) + 9 \\
 &= 8 - 6 + 9 = 11
 \end{aligned}$$

除此以外,我们还有别的配对视角:

$$\begin{aligned}
P(w^3) &= P(\overline{\omega^2}) = \overline{P(\omega^2)} \\
P(w)P(w^2)P(w^3)P(w^4) &= |P(w)P(w^2)|^2 \\
&= |(\omega^2 + \omega + 2)(\omega^4 + \omega^2 + 2)|^2 \\
&= |\omega^6 + \omega^5 + 3\omega^4 + \omega^3 + 4\omega^2 + 2\omega + 4|^2 \\
&= |3\omega^4 + \omega^3 + 4\omega^2 + 3\omega + 5|^2 \\
&= (3\omega^4 + \omega^3 + 4\omega^2 + 3\omega + 5)(3\omega + \omega^2 + 4\omega^3 + 3\omega^4 + 5) \\
&\quad 3\omega^4 + \omega^3 + 4\omega^2 + 3\omega + 5 \\
&= 3(-\omega^3 - \omega^2 - \omega - 1) + \omega^3 + 4\omega^2 + 3\omega + 5 \\
&\quad = -2\omega^3 + \omega^2 + 2 \\
3\omega + \omega^2 + 4\omega^3 + 3\omega^4 + 5 &= \omega^3 - 2\omega^2 + 2 \\
&\quad |P(w)P(w^2)|^2 \\
&= (-2\omega^3 + \omega^2 + 2)(\omega^3 - 2\omega^2 + 2) \\
&= -2\omega^6 + 5\omega^5 - 2\omega^4 - 2\omega^3 - 2\omega^2 + 4 \\
&= 9 - 2(\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4) = 11
\end{aligned}$$

例题 7.20

题目来源：北京大学

求证：

$$\cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} + \cos \frac{8\pi}{11} + \cos \frac{10\pi}{11} = -\frac{1}{2}.$$

解答

构造11次单位根： $w^{11} = 1$ ：

$$\begin{aligned}
1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^{10} &= 1 \\
\Re(1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^{10}) &= 1 \\
\Re[1 + 2(\omega^2 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^8 + \omega^{10})] &= 1 \\
\cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} + \cos \frac{8\pi}{11} + \cos \frac{10\pi}{11} \\
&= \Re(\omega^2 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^8 + \omega^{10}) = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

例题 7.21

题目来源：2025 北京大学

$$\sum_{i=1}^{1012} (-1)^{i+1} \cos \frac{i\pi}{2025} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

解答

设 $\omega = -e^{\frac{\pi}{2025}i} = -\cos \frac{\pi}{2025} - i \sin \frac{\pi}{2025}$, 则:

$$\begin{aligned} \omega^{2025} &= (-1)^{2025} e^{\pi i} = 1, |\omega| = 1, \overline{\omega^k} = \frac{1}{\omega^k} = \omega^{2025-k} \\ &= \frac{\omega^{2025} - 1}{\omega - 1} \\ &= (\omega - 1)(1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^{2024}) = 0 (\omega \neq 1) \\ &1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^{2024} = 0 \\ &\Re(1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^{2024}) \\ &= \Re[1 + 2(\omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^{1012})] = 0 \\ &1 - \sum_{i=1}^{1012} (-1)^{i+1} \cos \frac{i\pi}{2025} = 0 \\ &\sum_{i=1}^{1012} (-1)^{i+1} \cos \frac{i\pi}{2025} = +\frac{1}{2} \end{aligned}$$

例题 7.22

题目来源：2026 北京大学

单位圆内接正 2026 边形的一个顶点到其余 2025 个顶点的距离之积为 _____。

解答

考虑 2026 次单位根:

$$\omega^{2026} = 1$$

这 2026 个复数在复平面上表示单位圆内接正 2026 边形的 2026 个顶点, 则所求为:

$$|(1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega^3) \cdots (1 - \omega^{2025})|$$

仍然考虑单位根对应的因式分解:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^{2025} \\ &= (x - \omega)(x - \omega^2) \cdots (x - \omega^{2025}) \end{aligned}$$

由此可知:

$$\begin{aligned} & |(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)\cdots(1-\omega^{2025})| \\ &= |\Phi(1)| = 2026 \end{aligned}$$

可见,对于任意 n 边形,乘积均为 $n(n=3,4,\cdots)$,容易验证 n 较小的情况.

7.4 复数的轨迹与几何应用

例题 7.23

题目来源：同济大学

i 为虚数单位。设复数 z 满足 $|z|=1$, 则

$$\left| \frac{z^2 - 2z + 2}{z - 1 + i} \right|$$

的最大值为 _____。

解答

有了例7.19,例7.22的铺垫,可知"遇事不决,因式分解":

$$\begin{aligned} & \left| \frac{z^2 - 2z + 2}{z - 1 + i} \right| \\ &= \left| \frac{(z - 1 + i)(z - 1 - i)}{z - 1 + i} \right| \\ &= |z - 1 - i| \leq \sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

例题 7.24

题目来源：复旦大学

在复平面上, 满足方程

$$z\bar{z} + z + \bar{z} = 3$$

的复数 z 对应点的轨迹是

- A. 圆
- B. 两个点
- C. 线段

D. 直线**解答**

$$\begin{aligned}
 |z|^2 + 2\Re(z) &= 3 \\
 z &= x + yi (x, y \in \mathbb{R}) \\
 x^2 + y^2 + 2x &= 3 \\
 (x+1)^2 + y^2 &= 4
 \end{aligned}$$

正确答案:A

例题 7.25**题目来源：**清华大学

若复数

$$\frac{\omega - 1}{\omega + 1}$$

的实部为 0, z 是复平面上与复数

$$\frac{1}{\omega + 1}$$

对应的点, 则点 z 的轨迹是**A.** 一条直线**B.** 一条线段**C.** 一个圆**D.** 一段圆弧**解答**

$$\begin{aligned}
 \omega &= x + yi (x, y \in \mathbb{R}) \\
 \frac{\omega - 1}{\omega + 1} &= 1 - \frac{2}{\omega + 1} \\
 &= 1 - 2z \\
 \Re(1 - 2z) &= 0 \implies \Re(z) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

正确答案:A 一条直线 $x = \frac{1}{2}$

例题 7.26

题目来源：复旦大学

已知 $|z| = r, r > 1$, 则

$$\frac{1}{z} + z$$

在复平面内的轨迹是

- A. 焦距为 4 的椭圆
- B. 焦距为 2 的椭圆
- C. 焦距为 $\frac{r}{4}$ 的椭圆
- D. 焦距为 $\frac{r}{2}$ 的椭圆

解答

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} \\ = \left(r \cos \theta + \frac{1}{r} \cos \theta\right) + \left(r \sin \theta - \frac{1}{r} \sin \theta\right)i \end{aligned}$$

我们面临一个问题:点 $(r \cos \theta + \frac{1}{r} \cos \theta, r \sin \theta - \frac{1}{r} \sin \theta)$ 在平面上代表的点的轨迹是什么?

事实上,换一种写法: $((r + \frac{1}{r}) \cos \theta, (r - \frac{1}{r}) \sin \theta)$

一切便水落石出,椭圆参数中:

$$\begin{cases} a = r + \frac{1}{r}, \\ b = r - \frac{1}{r}, \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} = +2 \end{cases}$$

所以,焦距为 $2c = 4$.

正确答案:A

例题 7.27

题目来源：安徽省数学竞赛改编

设 z 是复数, 则

$$|z - 1| + |z - i| + |z + 1|$$

的最小值等于

A. 2

B. $1 + \sqrt{2}$

C. $1 + \sqrt{3}$

D. 3

解答

从几何意义上看,这就是著名的"费马点"问题:

这里我们不加以详细讨论,直接沿用经典结论:

$$d_1 + d_2 + d_3 \geq 2\frac{2\sqrt{3}}{3} + (1 - \frac{\sqrt{3}}{3}) = \sqrt{3} + 1$$

例题 7.28

题目来源: 2025 北京大学

复数 z_1 对应的点在线段连接的点 2 与点 $2i$ 之间运动, 且 $|z_2| = 1$, 求复数 $z_1 + 2z_2$ 对应的点在复平面上扫过的区域的面积。

解答

想象一个半径为2的圆盘,在以 $(2, 0)$, $(0, 2)$ 为端点的线段上滑动,划过区域的面积为:

$$\pi \cdot 2^2 + 2\sqrt{2} \cdot 4 = 4(\pi + 2\sqrt{2})$$