

[2027强基计划]数列进阶

整理《2027强基计划0912版本》第5章数列进阶的24道例题，涵盖数列建模与基本关系、递推数列与通项公式、数列求和、数列极限与综合，并整理各题解答与方法说明。

2026年9月25日 · 数学 · 强基计划 · 数列

第5章 数列进阶

题目整理自《2027强基计划0912版本》第5章（PDF第35—40页），保留原题编号、来源、选项与小问，并整理解答与方法说明。

5.1 数列建模与基本关系

例题 5.1

意大利比萨饼店的伙计喜欢将饼切成形状各异的一块块。他们发现，每一个确定的刀数，都可以有一个最多的块数。例如，切一刀最多切成2块，切2刀最多切成4块。问切5刀最多可切几块？切 n 刀最多可以切几块？（ n 是正整数）

解答

我们采取每次尽可能多地增加块数的策略。把比萨饼视为一个凸的平面区域，每一刀对应一条直线。要让第 n 刀增加最多的块数，须使它与前 $n-1$ 条刀痕的交点互不重合，且都落在饼内；仅有“两两相交”还不够。

这 $n-1$ 个交点把新刀痕分成 n 段，每段将原有的一块分成两块，因此最多增加 n 块。适当安排刀痕，可以同时达到这些条件。

设切完 n 刀后的最多块数为 a_n ，并令 $a_0 = 1$ ，则

$$a_n - a_{n-1} = n \quad (n \geq 1)。$$

累加得

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^n k = 1 + \frac{n(n+1)}{2}。$$

特别地， $a_5 = 16$ ，即切5刀最多得到16块。

例题 5.2

平面内 n 个圆，最多将此平面分割成多少个区域？

解答

类比例题 5.1，第 n 个圆与前 $n - 1$ 个圆最多有 $2(n - 1)$ 个不同的交点。当 $n \geq 2$ 时，这些交点把新圆分成 $2(n - 1)$ 段圆弧，每段圆弧使区域数增加 1。

要达到最大值，可令任意两个圆相交于两点，且任意三个圆不共点。设 n 个圆分出的最多区域数为 b_n ，则

$$b_1 = 2, \quad b_n - b_{n-1} = 2(n - 1) \quad (n \geq 2)。$$

因此

$$b_n = 2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k = n(n - 1) + 2。$$

例题 5.3

空间中 n 个平面，最多将此空间分成多少个部分？

解答

维度升高到三维后，我们考察新平面上的“交线与区域”。第 n 个平面与前 $n - 1$ 个平面最多产生 $n - 1$ 条交线；这些交线在新平面上每分出一个区域，就对应一个被新平面切开的原空间区域。

要达到最大值，可使这些交线无平行、无三线共点；在空间中可通过让平面处于一般位置来实现。由例题 5.1，新平面最多被分成

$$a_{n-1} = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

个区域。设空间的最多部分数为 c_n ，则

$$c_1 = 2, \quad c_n - c_{n-1} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1 \quad (n \geq 2)。$$

这里可以直接累加，也可以沿着“裂项—构造常数列”的思路，寻找多项式 $f(n)$ ，使相邻两项之差等于右侧。差分会使多项式降一次，因此设

$$f(n) = An^3 + Bn^2 + Cn + D。$$

比较系数：

$$\begin{aligned} f(n) - f(n-1) &= A(3n^2 - 3n + 1) + B(2n - 1) + C \\ &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{cases} 3A = \frac{1}{2}, \\ 2B - 3A = -\frac{1}{2}, \\ A - B + C = 1, \end{cases} \quad A = \frac{1}{6}, \quad B = 0, \quad C = \frac{5}{6}.$$

再令 $f(1) = c_1 = 2$, 得到 $D = 1$ 。此时

$$c_n - f(n) = c_{n-1} - f(n-1) = \cdots = c_1 - f(1) = 0,$$

所以

$$c_n = \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n + 1.$$

例题 5.4

空间中 n 个球面, 最多将此空间分成多少个部分?

解答

仍然考察第 n 个球面与前 $n-1$ 个球面的交线: 最多产生 $n-1$ 个圆。与平面上的圆类似, 球面上两个圆最多相交于两点; 当交点数达到最大且无三圆共点时, $m \geq 1$ 个圆将球面分成 $m(m-1) + 2 = b_m$ 个区域。

这些最大配置可以实现。例如, 先取半径相同、球心位置一般的球面, 再使球心充分靠近, 可使任意两个球面相交成圆、任意三个球面相交于两点, 并避免四个球面共点。新球面每增加一个面片, 就使空间部分数增加 1。

设 n 个球面分出的最多部分数为 d_n 。注意首个球面须单独处理: $d_1 = 2$ 。当 $n \geq 2$ 时,

$$d_n - d_{n-1} = b_{n-1} = (n-1)^2 - (n-1) + 2.$$

因此

$$\begin{aligned}
 d_n &= 2 + \sum_{i=1}^{n-1} (i^2 - i + 2) \\
 &= 2 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1) \\
 &= \frac{1}{3}n^3 - n^2 + \frac{8}{3}n.
 \end{aligned}$$

前四题的共同思路是：考察新增元素被已有元素分成多少部分，再把这个数转化为新增区域数，最后通过累加或构造常数数列求通项。同时要说明上界能够达到。

在这些一般位置的直线、圆、平面和球面分割问题中，区域数关于元素个数的多项式次数与空间维数相应。这是这类模型的规律，不能直接推广到任意曲线、曲面的分割问题。

例题 5.5

题目来源：北京大学

设数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 2019$ ，前 n 项和 S_n 满足 $S_n = n^2 a_n$ ，则 a_{2018} 的值为

A. $\frac{1}{2019}$

B. $\frac{1}{2018}$

C. $\frac{1}{1009}$

D. 前三个答案都不对

解答

先由前几项观察规律：

$$\begin{aligned}
 S_2 = 4a_2 &\implies a_2 = \frac{1}{3}a_1, \\
 S_3 = 9a_3 &\implies a_3 = \frac{1}{6}a_1, \\
 S_4 = 16a_4 &\implies a_4 = \frac{1}{10}a_1.
 \end{aligned}$$

分母 1, 3, 6, 10 的相邻差为 2, 3, 4，提示我们猜测

$$a_n = \frac{2a_1}{n(n+1)}.$$

下面通过消去 S_n 证明这个猜测，而不只依赖观察。由 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ ，有

$$\begin{aligned}(n+1)^2 a_{n+1} - n^2 a_n &= a_{n+1}, \\ n(n+2)a_{n+1} &= n^2 a_n, \\ (n+2)a_{n+1} &= na_n.\end{aligned}$$

两边乘以 $n+1$, 得到

$$(n+1)(n+2)a_{n+1} = n(n+1)a_n.$$

所以 $\{n(n+1)a_n\}$ 是常数列, 恒等于 $2a_1$ 。从而

$$a_{2018} = \frac{2 \cdot 2019}{2018 \cdot 2019} = \frac{1}{1009}.$$

正确答案为 C。

例题 5.6

题目来源: 北京大学

已知一递增无穷等差数列中有 3 项: 13, 25, 41。求证: 2009 为数列中一项。

证明

设公差为 $d > 0$, 且 $a_r = 25$ 、 $a_s = 41$, 其中 $s > r$ 。则

$$(s-r)d = 41 - 25 = 16.$$

注意 $2009 - 41 = 1968 = 123 \cdot 16$, 因此

$$a_{s+123(s-r)} = a_s + 123(s-r)d = 41 + 123 \cdot 16 = 2009.$$

下标 $s + 123(s-r)$ 是正整数, 且数列有无穷多项, 故 2009 确为其中一项。这个证明只需用到已知项 25 和 41。

5.2 递推数列与通项公式

例题 5.7

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且

$$a_{n+1} = 3a_n - 2n^2 + 4n + 4,$$

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解答

为了消去递推式中的多项式部分，设 $f(n) = An^2 + Bn + C$ ，要求

$$f(n+1) - 3f(n) = -2n^2 + 4n + 4。$$

展开并比较系数：

$$\begin{cases} -2A = -2, \\ 2A - 2B = 4, \\ A + B - 2C = 4, \end{cases} \quad A = 1, \quad B = -1, \quad C = -2。$$

于是 $f(n) = n^2 - n - 2$ 。把它与原递推式相减，得到

$$a_{n+1} - f(n+1) = 3(a_n - f(n))。$$

因此 $\{a_n - f(n)\}$ 是公比为 3 的等比数列。其首项为 $a_1 - f(1) = 3$ ，所以

$$a_n - f(n) = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n, \quad a_n = 3^n + n^2 - n - 2。$$

方法说明：非齐次递推的特解。 对于 $a_{n+1} = ka_n + g(n)$ ，如果能找到 $f(n)$ 满足 $f(n+1) - kf(n) = g(n)$ ，那么 $u_n = a_n - f(n)$ 就满足齐次递推 $u_{n+1} = ku_n$ 。这里 $f(n)$ 不必符合原数列的初值；初值的差由 u_n 补足。

当 $g(n)$ 是 m 次多项式且 $k \neq 1$ 时，可尝试同为 m 次的多项式特解；当 $k = 1$ 时，差分使次数降低，通常应尝试 $m + 1$ 次多项式。并不是任意 $g(n)$ 都能用多项式特解处理。

例题 5.8

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 4$ ，且

$$a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 4},$$

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解答

令 $F(x) = \frac{3x+2}{x+4}$ 。所谓不动点，就是满足 $F(r) = r$ 的数 r ：若某项恰好等于 r ，以后各项便保持为 r 。求解时还须排除使原分母为零的值。

本题的不动点满足

$$x = \frac{3x+2}{x+4} \iff x^2 + x - 2 = 0,$$

得到 $r_1 = 1$ 、 $r_2 = -2$ 。它们的作用不只是可能的极限，更在于让“递推式减去常数”后的分子因式分解：

$$a_{n+1} - 1 = \frac{2(a_n - 1)}{a_n + 4}, \quad a_{n+1} + 2 = \frac{5(a_n + 2)}{a_n + 4}.$$

由 $a_1 = 4 > 1$ 及第一式，归纳得 $a_n > 1$ ，因此以下分母均不为零。两式相除：

$$\frac{a_{n+1} + 2}{a_{n+1} - 1} = \frac{5}{2} \frac{a_n + 2}{a_n - 1}.$$

于是

$$\frac{a_n + 2}{a_n - 1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} \frac{a_1 + 2}{a_1 - 1} = 2 \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}.$$

利用 $a_n + 2 = (a_n - 1) + 3$ ，解得

$$a_n = 1 + \frac{3}{2 \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} - 1}.$$

方法说明：两个不动点为何产生等比数列？ 对于非退化分式线性函数

$$F(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

若 r 是不动点，则

$$F(x) - r = \frac{(\alpha - \gamma r)(x - r)}{\gamma x + \delta}.$$

若有两个不同的有限不动点 r_1, r_2 ，且代换中的分母不为零，便有

$$\frac{F(x) - r_1}{F(x) - r_2} = \frac{\alpha - \gamma r_1}{\alpha - \gamma r_2} \frac{x - r_1}{x - r_2}.$$

这正是等比递推。若初值就是某个不动点，则应先单独记为常数列，不必作上述除法。不动点本身也不保证数列收敛；求极限时仍须另证收敛性。

例题 5.9

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$ ，且

$$a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{9a_n + 8},$$

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解答

先求不动点：

$$x = \frac{2x - 1}{9x + 8} \iff 9x^2 + 6x + 1 = 0 \iff (3x + 1)^2 = 0.$$

这里只得到重合的不动点 $r = -\frac{1}{3}$ ，不能直接使用例题 5.8 中两个不同不动点的比值。改为减去不动点后取倒数：

$$a_{n+1} + \frac{1}{3} = \frac{5(a_n + \frac{1}{3})}{9a_n + 8}.$$

由 $a_1 > -\frac{1}{3}$ ，归纳可得 $a_n > -\frac{1}{3}$ ，且 $9a_n + 8 > 5$ ，故倒数代换合法。令 $b_n = \frac{1}{a_n + \frac{1}{3}}$ ，则

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{9a_n + 8}{5(a_n + \frac{1}{3})} \\ &= \frac{9(a_n + \frac{1}{3}) + 5}{5(a_n + \frac{1}{3})} = \frac{9}{5} + b_n. \end{aligned}$$

所以 $\{b_n\}$ 为等差数列，且 $b_1 = \frac{3}{10}$ 。于是

$$b_n = \frac{9}{5}(n-1) + \frac{3}{10} = \frac{9}{5}n - \frac{3}{2}, \quad a_n = \frac{1}{\frac{9}{5}n - \frac{3}{2}} - \frac{1}{3}.$$

回看例题 5.8：一个不动点也可以使用。从 $a_{n+1} - 1 = \frac{2(a_n - 1)}{a_n + 4}$ 出发，令 $b_n = \frac{1}{a_n - 1}$ ，便有

$$b_{n+1} = \frac{5}{2}b_n + \frac{1}{2}, \quad b_{n+1} + \frac{1}{3} = \frac{5}{2} \left(b_n + \frac{1}{3} \right)。$$

由 $b_1 = \frac{1}{3}$ ，得到

$$b_n + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1}, \quad a_n = 1 + \frac{1}{\frac{2}{3} \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1} - \frac{1}{3}},$$

与原解一致。

一般地，对上一题的分式线性函数，取一个有限不动点 r 并令 $b_n = 1/(a_n - r)$ ，可得

$$b_{n+1} = \frac{\gamma r + \delta}{\alpha - \gamma r} b_n + \frac{\gamma}{\alpha - \gamma r}。$$

因此，倒数代换将分式递推变成了一阶线性递推。当不动点方程 $\gamma x^2 + (\delta - \alpha)x - \beta = 0$ 有二重根且 $\gamma \neq 0$ 时， $2\gamma r = \alpha - \delta$ ，上式中 b_n 的系数恰为 1，从而得到等差递推。

两种代换殊途同归：选择两个不动点的比值，或选择一个不动点的倒数，都在设法把原递推化成更容易处理的线性关系。

例题 5.10

求斐波那契数列

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

的通项公式。

解答

先寻找满足递推的等比形式 q^{n-1} 。代入 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ，得到特征方程

$$q^2 - q - 1 = 0。$$

其两根为

$$q_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad q_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad q_1 + q_2 = 1, \quad q_1 q_2 = -1。$$

由于递推是线性齐次的，两个解的线性组合仍是解，因此设

$$a_n = Aq_1^{n-1} + Bq_2^{n-1}。$$

由初值确定系数：

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ Aq_1 + Bq_2 = 1, \end{cases} \quad A = -\frac{q_1}{\sqrt{5}}, \quad B = \frac{q_2}{\sqrt{5}}。$$

这个表达式既满足递推，又满足前两项；而二阶递推的后续各项由前两项唯一确定，所以它就是所求数列。故

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]。$$

方法说明：特征方程与降阶。 对常系数线性齐次递推 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ ，特征方程为 $x^2 - px - q = 0$ 。若两根为 r_1, r_2 ，则 $r_1 + r_2 = p$ 、 $r_1 r_2 = -q$ ，于是

$$a_{n+2} - r_1 a_{n+1} = r_2 (a_{n+1} - r_1 a_n)。$$

这说明减去一项的适当倍数可以把二阶递推降为一阶。两根不同时，可交换 r_1, r_2 再写一式，得到两条等比递推。本题中具体为

$$\begin{aligned} a_{n+1} - q_1 a_n &= (1 - q_1)q_2^{n-1}, \\ a_{n+1} - q_2 a_n &= (1 - q_2)q_1^{n-1}。 \end{aligned}$$

两式相减即可解出同一通项公式。这解释了特征方程方法为何有效，而不只是提供一个待定形式。

例题 5.11

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ， $a_2 = 4$ ，且

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n，$$

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解答

特征方程为

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0。$$

当两根重合时，两份 2^{n-1} 的线性组合仍只有一个独立系数，无法表示任意给定的前两项。多出的 n 因子可以通过降阶推导出来。

一般地，若非零重根为 q ，递推可写成

$$a_{n+2} = 2qa_{n+1} - q^2a_n,$$

从而

$$a_{n+2} - qa_{n+1} = q(a_{n+1} - qa_n).$$

令 $u_n = a_n/q^{n-1}$ ，并除以 q^{n+1} ，得到

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n.$$

所以 $\{u_n\}$ 是等差数列，

$$u_n = a_1 + (n-1)\left(\frac{a_2}{q} - a_1\right),$$

也就是 $a_n = (An + B)q^{n-1}$ 。本题中 $q = 2$ ， $u_1 = 1$ 、 $u_2 = 2$ ，故 $u_n = n$ ，从而

$$a_n = n \cdot 2^{n-1}.$$

因此，重根对应的 n 因子来自“除去指数因子后得到等差数列”，不是任意增添一个待定系数。更高阶递推中，非零特征根 r 的重数若为 m ，对应的解具有 $P_{m-1}(n)r^{n-1}$ 的形式，其中 P_{m-1} 是次数不超过 $m-1$ 的多项式。

例题 5.12

已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = a_3 = 1$ ， $a_2 = -1$ ，

$$a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n \quad (n \in \mathbb{N}^*),$$

求该数列的通项公式。

解答

特征方程分解为

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2(x-2) = 0.$$

先沿着降阶的思路，令 $b_n = a_{n+1} - a_n$ 。将原递推改写为

$$a_{n+3} - a_{n+2} = 3(a_{n+2} - a_{n+1}) - 2(a_{n+1} - a_n),$$

可得

$$b_{n+2} = 3b_{n+1} - 2b_n, \quad b_1 = -2, \quad b_2 = 2。$$

其特征根为 1, 2, 设 $b_n = A + B2^{n-1}$ 。由

$$A + B = -2, \quad A + 2B = 2,$$

得到 $A = -6$ 、 $B = 4$ 。再累加还原：

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 1 - 6(n-1) + 4(2^{n-1} - 1) \\ &= -6n + 3 + 2^{n+1}。 \end{aligned}$$

这里等比和的末项为 2^{n-2} ，所以和是 $2^{n-1} - 1$ 。

也可以直接根据二重根 1 和单根 2，设

$$a_n = (An + B)1^{n-1} + C2^{n-1}。$$

代入三项初值：

$$\begin{cases} A + B + C = 1, \\ 2A + B + 2C = -1, \\ 3A + B + 4C = 1, \end{cases} \quad A = -6, \quad B = 3, \quad C = 4。$$

两条路线得到相同结果。作差 $b_n = a_{n+1} - a_n$ 对应从特征多项式中除去一个因子 $x - 1$ ，因此三阶递推降为二阶；这一点与多项式除法相呼应。

例题 5.13

已知数列

$$a_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} \quad (n \in \mathbb{N}^+),$$

则以下哪些数能被 3 整除

A. a_{2019}

B. a_{2020}

C. a_{2021}

D. a_{2022}

解答

从通项反过来构造递推。令 $q_1 = 2 + \sqrt{3}$ 、 $q_2 = 2 - \sqrt{3}$ ，则 $q_1 + q_2 = 4$ 、 $q_1 q_2 = 1$ ，故它们都是 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 的根。因此

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 4。$$

这个递推首先说明各项都是整数。令 b_n 为 a_n 除以 3 的余数，则

$$b_{n+2} \equiv b_{n+1} - b_n \pmod{3}。$$

依次计算得到

$$b_1, b_2, \dots = 1, 1, 0, 2, 2, 0, 1, 1, \dots。$$

第 7, 8 项的余数与第 1, 2 项相同，而连续两项决定后面的余数，因此每 6 项循环一次，且恰在下标为 3 的倍数时余数为 0。所以 a_{2019} 、 a_{2022} 能被 3 整除，正确答案为 A、D。

补充解法（GPT-6）：直接看每隔三项的关系。由模 3 递推，

$$a_{n+3} \equiv a_{n+2} - a_{n+1} \equiv (a_{n+1} - a_n) - a_{n+1} \equiv -a_n \pmod{3}。$$

因此下标增加 3 不改变“能否被 3 整除”。检查 $a_1 = 1$ 、 $a_2 = 4$ 、 $a_3 = 15$ 即知，恰有 $3 \mid n$ 时 $3 \mid a_n$ ，无需列完整循环节。

例题 5.14

题目来源：清华大学

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 5$ ， $a_2 = 13$ ，

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + 6^n}{a_n},$$

则

A. $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$

B. a_n 都是整数

C. $a_n > 4^n$

D. $\{a_n\}$ 中与 2015 最接近的项是 a_7

解答

由前两项为正及原递推，归纳得所有 $a_n > 0$ ，以下除法合法。把相邻两个递推式写为

$$\begin{aligned} a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 &= 6^n, \\ a_{n+3}a_{n+1} - a_{n+2}^2 &= 6^{n+1}. \end{aligned}$$

用第二式减去第一式的 6 倍，整理得到

$$(a_{n+3} + 6a_{n+1})a_{n+1} = (a_{n+2} + 6a_n)a_{n+2}.$$

所以

$$\frac{a_{n+3} + 6a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{a_{n+2} + 6a_n}{a_{n+1}},$$

即这些比值构成常数列。又有

$$a_3 = \frac{13^2 + 6}{5} = 35, \quad \frac{a_3 + 6a_1}{a_2} = \frac{35 + 30}{13} = 5,$$

故 $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ ，选项 **A** 正确。由于初值和递推系数均为整数，归纳可知各项均为整数，选项 **B** 正确。

特征方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根为 2, 3。设 $a_n = A2^{n-1} + B3^{n-1}$ ，由 $A + B = 5$ 、 $2A + 3B = 13$ ，得 $A = 2$ 、 $B = 3$ ，所以

$$a_n = 2^n + 3^n.$$

当 $n = 2$ 时， $a_2 = 13 < 16 = 4^2$ ，已经否定选项 **C**。若比较增长速度，应写 $a_n/3^n = 1 + (2/3)^n \rightarrow 1$ ，而不能把随 n 变化的 3^n 写成 a_n 的极限。

数列严格递增，且

$$a_6 = 793 < 2015 < 2315 = a_7.$$

因此只需比较这两项与 2015 的距离：

$$2015 - a_6 = 1222, \quad a_7 - 2015 = 300。$$

可见最接近的是 a_7 ，选项 **D** 正确。正确答案为 **A、B、D**。

5.3 数列求和

例题 5.15

题目来源：清华大学

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n = \lg \left(1 + \frac{2}{n^2 + 3n} \right), \quad n = 1, 2, \dots。$$

S_n 是数列的前 n 项和，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$

A. 0

B. $\lg \frac{3}{2}$

C. $\lg 2$

D. $\lg 3$

解答

将对数内的式子分解：

$$a_n = \lg \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}。$$

利用对数求和转乘积，再将两组因子分别约去：

$$\begin{aligned} S_n &= \lg \prod_{k=1}^n \frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)} \\ &= \lg \left(\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{k+2}{k+3} \right) \\ &= \lg \left((n+1) \frac{3}{n+3} \right)。 \end{aligned}$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lg 3$, 正确答案为 **D**。

例题 5.16

题目来源：上海交通大学

已知

$$a_k = \frac{k+2}{k! + (k+1)! + (k+2)!},$$

求数列 $\{a_n\}$ 前 100 项的和。

解答

先提取分母的公因子 $k!$, 再考虑相邻阶乘的倒数之差:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{k+2}{k! [1 + (k+1) + (k+1)(k+2)]} \\ &= \frac{k+2}{k!(k+2)^2} = \frac{1}{k!(k+2)} \\ &= \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{k+2-1}{(k+2)!} \\ &= \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!} \circ \end{aligned}$$

累加后中间项相消, 得到

$$S_{100} = \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{102!} \circ$$

例题 5.17

题目来源：复旦大学

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,

$$a_n = \frac{1}{(\sqrt{n-1} + \sqrt{n})(\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})},$$

求 S_{2003} 。

解答

分母中前、后两个因子分别对应相邻下标, 提示我们尝试裂项

$$a_n = k \left(\frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \right)。$$

先计算括号中的差，再将分子有理化：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{(\sqrt{n-1} + \sqrt{n})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} \\ &= \frac{2}{(\sqrt{n-1} + \sqrt{n})(\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = 2a_n。 \end{aligned}$$

所以 $k = \frac{1}{2}$ ，由裂项相消得

$$\begin{aligned} S_{2003} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2003} + \sqrt{2004}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{2003} - \sqrt{2004} \right)。 \end{aligned}$$

例题 5.18

题目来源：上海交通大学

已知 $a_1 = \frac{3}{2}$ ， $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ ，求

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2017}}$$

的整数部分。

解答

对递推函数 $F(x) = x^2 - x + 1$ ，不动点方程 $F(x) = x$ 化为 $(x-1)^2 = 0$ 。减去不动点 1，得到

$$a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1)。$$

由 $a_1 = \frac{3}{2} > 1$ ，归纳得所有 $a_n > 1$ ，故可取倒数：

$$\frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{a_n(a_n - 1)} = \frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_n}。$$

于是

$$\sum_{n=1}^{2017} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{2017} \left(\frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1} \right) = 2 - \frac{1}{a_{2018} - 1}.$$

为了确定整数部分，还须控制最后一项。由

$$a_{n+1} - a_n = (a_n - 1)^2 > 0,$$

知数列严格递增，因而 $a_n \geq a_1 = \frac{3}{2}$ 。所以

$$a_{n+1} - a_n \geq \frac{1}{4}, \quad a_{2018} \geq \frac{3}{2} + \frac{2017}{4} > 2.$$

因此 $0 < 1/(a_{2018} - 1) < 1$ ，所求和严格介于 1 与 2 之间，整数部分为 1。

例题 5.19

题目来源：复旦大学

设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1$, $b_n > 0$ ($n = 2, 3, \dots$)，其前 n 项乘积

$$T_n = (a^{n-1}b_n)^n \quad (a > 1, n = 1, 2, \dots).$$

1. 证明 $\{b_n\}$ 是等比数列；
2. 求 $\{b_n\}$ 中所有不同两项的乘积之和。

解答

(1) 证明等比关系。当 $n \geq 2$ 时，由 $b_n = T_n/T_{n-1}$ ，得到

$$b_n = \frac{a^{n(n-1)}b_n^n}{a^{(n-1)(n-2)}b_{n-1}^{n-1}}.$$

因 $b_n, b_{n-1} > 0$ ，可以约去并整理为

$$\left(\frac{b_n}{b_{n-1}} \right)^{n-1} = a^{-2(n-1)}.$$

取正的 $(n-1)$ 次方根，得 $b_n/b_{n-1} = a^{-2}$ 。因此数列的首项为 1、公比为 $a^{-2} \in (0, 1)$ ，通项为

$$b_n = a^{-2(n-1)}.$$

(2) 求不同两项的乘积之和。每对不同下标只计一次，即求 $\sum_{1 \leq i < j < \infty} b_i b_j$ 。由于 $\sum b_n$ 收敛且各项为正，下列求和收敛，可按较小下标分组：

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j < \infty} b_i b_j &= \sum_{i=1}^{\infty} b_i \left(\sum_{j=i+1}^{\infty} b_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} a^{-2(i-1)} \frac{a^{-2i}}{1 - a^{-2}} \\ &= \frac{1}{1 - a^{-2}} \sum_{i=1}^{\infty} a^{-2(2i-1)} \\ &= \frac{a^{-2}}{(1 - a^{-2})(1 - a^{-4})} \\ &= \frac{a^4}{(a^2 - 1)^2(a^2 + 1)}. \end{aligned}$$

也可以沿用两两乘积的恒等式。先对有限项写出平方展开，再令项数趋于无穷：

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j < \infty} b_i b_j &= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1 - a^{-2})^2} - \frac{1}{1 - a^{-4}} \right] = \frac{a^4}{(a^2 - 1)^2(a^2 + 1)}. \end{aligned}$$

例题 5.20

题目来源：同济大学

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a$, $a_2 = b$, $2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 。

1. 设 $b_n = a_{n+1} - a_n$ 。证明：若 $a \neq b$ ，则 $\{b_n\}$ 成等比数列；
2. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = 4$ ，求 a, b 的值。

解答

(1) 证明等比关系。由原递推得

$$2(a_{n+2} - a_{n+1}) = -(a_{n+1} - a_n), \quad b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n.$$

又 $b_1 = b - a \neq 0$ ，因此 $\{b_n\}$ 是公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列。

(2) 利用差分还原通项。对任意 a, b , 均有

$$b_n = (b - a) \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}。$$

于是

$$\begin{aligned} a_n &= a + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= a + (b - a) \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{a + 2b}{3} + \frac{2(a - b)}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}。 \end{aligned}$$

若前 n 项和 $S_n \rightarrow 4$, 则 $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$ 。而通项给出 $a_n \rightarrow (a + 2b)/3$, 故必须有 $a + 2b = 0$ 。在此条件下,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2(a - b)}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{9}(a - b) = 4。$$

联立 $a - b = 9$ 、 $a = -2b$, 得到 $a = 6$ 、 $b = -3$ 。代回后 $a_n = 6(-1/2)^{n-1}$, 其无穷和确为 4。

补充解法 (GPT-6) : 直接对递推求和。 令 $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ 。对 $2a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$ 从 $k = 1$ 加到 n , 有

$$2(S_{n+2} - a - b) = S_{n+1} - a + S_n。$$

由 $S_n \rightarrow 4$, 取极限得到 $a + 2b = 0$ 。同时, 原递推还给出不变量

$$2a_{n+2} + a_{n+1} = 2a_{n+1} + a_n = a + 2b = 0。$$

因此 $a_{n+1} = -a_n/2$, 数列本身为等比数列, 无穷和为 $2a/3 = 4$, 直接得 $a = 6$ 、 $b = -3$ 。

例题 5.21

题目来源: 北京大学

正整数

$$9 + 95 + 995 + \cdots + \underbrace{99 \cdots 9}_{2016} 5$$

的十进制表示中数字 1 的个数为

- A. 2012
- B. 2013
- C. 2014
- D. 前三个答案都不对

解答

含 i 个数字 9、末尾为 5 的数等于 $10^{i+1} - 5$ ，所以原和为

$$\begin{aligned} 9 + \sum_{i=1}^{2016} (10^{i+1} - 5) &= \underbrace{11 \cdots 1}_{2016 \text{ 个 } 1} 00 + 9 - 10080 \\ &= \underbrace{11 \cdots 1}_{2016 \text{ 个 } 1} 09 - 10080. \end{aligned}$$

为看清借位，将后五位与前缀分开。设 P 是由 2013 个数字 1 组成的整数，则上式等于

$$P \cdot 10^5 + 11109 - 10080 = P \cdot 10^5 + 1029.$$

因此十进制表示为

$$\underbrace{11 \cdots 1}_{2013 \text{ 个 } 1} 01029.$$

前缀有 2013 个 1，后五位还有 1 个 1，共 2014 个。正确答案为 C。

5.4 数列极限与综合

例题 5.22

计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 2} + \frac{3}{n^2 + 3} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \right)$$

解答

设括号内的和为 T_n 。对 $1 \leq k \leq n$ ，有 $n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$ ，因而

$$\frac{k}{n^2+n} \leq \frac{k}{n^2+k} \leq \frac{k}{n^2+1}.$$

逐项相加, 得到

$$\frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} \leq T_n \leq \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}.$$

这里用非严格不等号, 亦涵盖 $n=1$ 的情形。两端在 $n \rightarrow \infty$ 时都趋于 $\frac{1}{2}$, 由夹逼定理, 所求极限为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{1}{2}.$$

例题 5.23

题目来源: 上海交通大学

在 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 4$, $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$ 。

1. 求证: $|a_n - 3| < \frac{1}{3}|a_{n-1} - 3|$;

2. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 。

解答

(1) 估计与不动点的距离。不动点满足 $x = \sqrt{x+6}$ 。平方得 $(x-3)(x+2) = 0$, 但原式要求 $x \geq 0$, 所以只有 3 是不动点。

由 $a_1 = 4 > 3$, 且 $a_{n-1} > 3$ 时 $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6} > 3$, 归纳得所有 $a_n > 3$ 。又

$$a_n^2 - 9 = a_{n-1} - 3,$$

故对 $n \geq 2$,

$$|a_n - 3| = \frac{|a_{n-1} - 3|}{a_n + 3} < \frac{1}{6}|a_{n-1} - 3| < \frac{1}{3}|a_{n-1} - 3|.$$

(2) 单调有界, 求出极限。由 $a_{n-1} > 3$, 有

$$a_{n-1}^2 - (a_{n-1} + 6) = (a_{n-1} - 3)(a_{n-1} + 2) > 0.$$

两边涉及的量均为正, 因此 $a_{n-1} > \sqrt{a_{n-1} + 6} = a_n$ 。数列单调递减且以下界 3 为界, 由单调有界定理, 极限存在。

设极限为 $L \geq 3$ ，由平方根函数的连续性， $L = \sqrt{L+6}$ ，得 $L = 3$ 。

补充解法 (GPT-6)：用第 (1) 问直接夹逼。 将距离估计反复使用，对 $n \geq 2$ 有

$$0 < a_n - 3 < \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} (a_1 - 3) = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}。$$

右侧趋于 0，故 $a_n \rightarrow 3$ 。这个证明不必另证单调性，还给出了误差随项数减小的速度。

例题 5.24

题目来源：清华大学

数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数，且对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ ，满足 $a_{n+1} = a_n + ca_n^2$ ($c > 0$ 为常数)。

1. 求证：对任意正数 M ，存在 $N \in \mathbb{N}^*$ ，当 $n > N$ 时，有 $a_n > M$ ；
2. 设 $b_n = \frac{1}{1 + ca_n}$ ， S_n 是 $\{b_n\}$ 前 n 项和。求证：对任意 $d > 0$ ，存在 $N \in \mathbb{N}^*$ ，当 $n > N$ 时，有 $0 < \left| S_n - \frac{1}{ca_1} \right| < d$ 。

解答

(1) 给出超过任意上界的项数。 因为 $c > 0$ 、 $a_n > 0$ ，所以

$$a_{n+1} - a_n = ca_n^2 > 0。$$

故 $a_n \geq a_1$ ，进一步有 $a_{n+1} - a_n \geq ca_1^2$ 。从第 1 项累加到第 n 项，得到

$$a_n \geq a_1 + (n-1)ca_1^2。$$

对任意 $M > 0$ ，取正整数

$$N = \left\lceil \frac{M}{ca_1^2} \right\rceil + 1。$$

当整数 $n > N$ 时， $(n-1)ca_1^2 > M$ ，从而 $a_n > M$ 。这同时证明了 $a_n \rightarrow +\infty$ 。这里必须选取整数阈值 N ，并证明所有 $n > N$ 都满足要求，而不只是给出一个实数下标。

(2) 裂项并控制余项。 见到 $1 + ca_n$ ，联想到递推式 $a_{n+1} = a_n(1 + ca_n)$ ，于是

$$b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{ca_n^2}{ca_n a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_n}{ca_n a_{n+1}} = \frac{1}{ca_n} - \frac{1}{ca_{n+1}}。$$

累加得精确表达式

$$S_n = \frac{1}{ca_1} - \frac{1}{ca_{n+1}}, \quad 0 < \left| S_n - \frac{1}{ca_1} \right| = \frac{1}{ca_{n+1}}.$$

由第 (1) 问的估计, $a_{n+1} \geq a_1 + nca_1^2 > nca_1^2$, 所以

$$0 < \left| S_n - \frac{1}{ca_1} \right| < \frac{1}{nc^2a_1^2}.$$

对任意 $d > 0$, 取

$$N = \left\lceil \frac{1}{dc^2a_1^2} \right\rceil.$$

则 $N \in \mathbb{N}^*$, 且当 $n > N$ 时, 右侧严格小于 d , 原命题得证。

本题适合先裂项, 得到精确余项后再用夹逼估计。仅由 $b_n \rightarrow 0$ 不能判断其级数是否收敛, 更不能确定和; 但这并不意味着夹逼方法不能使用。

小结

- **建立递推：** 从新增元素带来的变化入手，既证明上界，也说明上界能达到。
- **一阶递推：** 非齐次式可尝试减去特解；分式线性递推可借助不动点作比值或倒数代换，并检查分母不为零。
- **高阶常系数线性齐次递推：** 特征方程来自等比试探解；不同根对应指数项，重根对应多项式因子。用初值确定系数，并用递推的唯一性确认结果。
- **数列求和：** 可用已知求和公式、裂项相消、对数转乘积或两两乘积恒等式；注意首末项和下标。
- **极限与证明：** 可先求和再取极限，也可使用夹逼或单调有界定理。若题目给出“对任意……存在……”的表述，应明确选取整数阈值，并核对严格不等号。