

# [2027强基计划]平面向量

整理《2027强基计划》第6章平面向量中的二十二道例题，涵盖向量条件的几何翻译、数量积几何化、重心及其推广和内积不等式。

2026年8月2日 · 强基计划 · 数学竞赛

## 向量条件的几何翻译

### 例题 6.1

(浙江卷) 已知  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{e}$  是平面向量,  $\vec{e}$  是单位向量。若非零向量  $\vec{a}$  与  $\vec{e}$  的夹角为  $\frac{\pi}{3}$ , 向量  $\vec{b}$  满足

$$|\vec{b}|^2 - 4\vec{e} \cdot \vec{b} + 3 = 0,$$

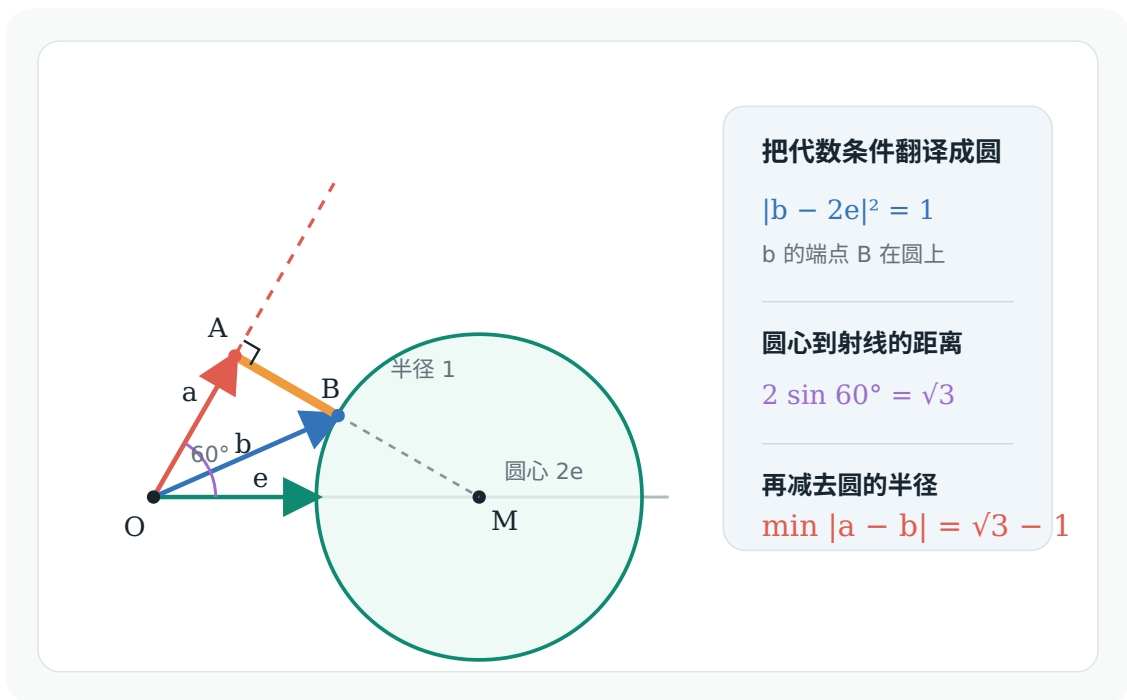
则  $|\vec{a} - \vec{b}|$  的最小值是 ( )

- A.  $\sqrt{3} - 1$
- B.  $\sqrt{3} + 1$
- C. 2
- D.  $2 - \sqrt{3}$

应当注意到因式分解:

$$(\vec{b} - \vec{e})(\vec{b} - 3\vec{e}) = 0$$

数形结合,考虑圆周上点到定直线上距离的最小值,选出A.



例题 6.1 的向量几何翻译

**例题 6.2**

已知向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  满足

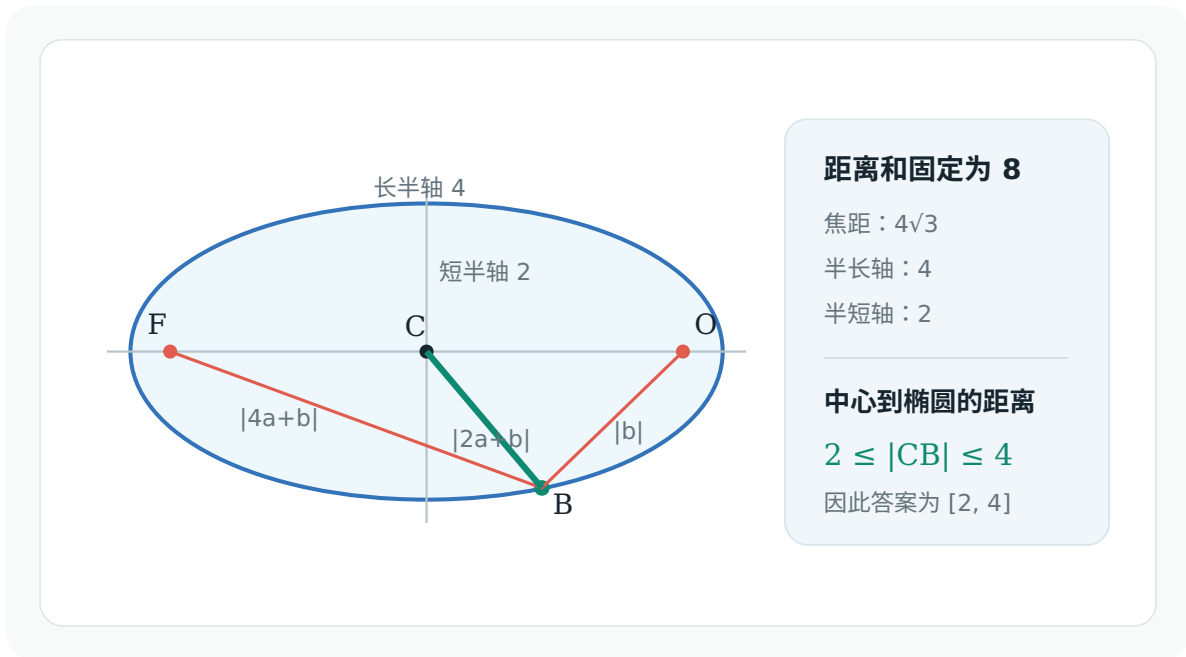
$$|\vec{a}| = \sqrt{3}, \quad |4\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{b}| = 8,$$

则  $|2\vec{a} + \vec{b}|$  的取值范围是 ( )

- A.  $[2, 4]$
- B.  $[0, 8]$
- C.  $[\sqrt{3}, 8]$
- D.  $[4, 16]$

不难发现,题中暗藏着  $a = 4, c = 2\sqrt{3}, b = 2$  的椭圆  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ , 所求  $|2\vec{a} + \vec{b}|$  则是椭圆上点到中心的距离, 则:

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 &= 16, y \in [-2, +2] \\ d^2 &= x^2 + y^2 = (16 - 4y^2) + y^2 \\ &= 16 - 3y^2 \in [4, 16] \\ d &\in [2, 4] \end{aligned}$$



例题 6.2 的椭圆模型

**例题 6.3**

(北京大学)  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  的夹角为  $\theta$ ,

$$|\vec{OA}| = 2, \quad |\vec{OB}| = 1,$$

$$\vec{OP} = t\vec{OA}, \quad \vec{OQ} = (1-t)\vec{OB}.$$

$|\vec{PQ}|$  在  $t = t_0$  时取得最小值。若  $0 < t_0 < \frac{1}{5}$ , 则  $\theta$  的取值范围为 ( )

- A.  $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$
- B.  $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$
- C.  $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6})$
- D.  $(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$

先考虑代数方法, 构建目标函数:

$$\begin{aligned}
|\vec{PQ}| &= |\vec{OQ} - \vec{OP}| \\
&= \sqrt{|\vec{OQ}|^2 + |\vec{OP}|^2 - 2|\vec{OQ}||\vec{OP}|\cos\theta} \\
&= \sqrt{(1-t)^2 + (2t)^2 - 2 \cdot (1-t) \cdot (2t)\cos\theta} \\
&= \sqrt{(5+4\cos\theta)t^2 - 2(2\cos\theta+1)t+1}, t \in \mathbb{R} \\
t_0 &= \frac{2\cos\theta+1}{5+4\cos\theta} \in (0, \frac{1}{5}) \\
\cos\theta &\in (-\frac{1}{2}, 0), \theta \in [0, \pi] \\
&\iff \theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})
\end{aligned}$$

当然,我们自有巧妙的几何法:

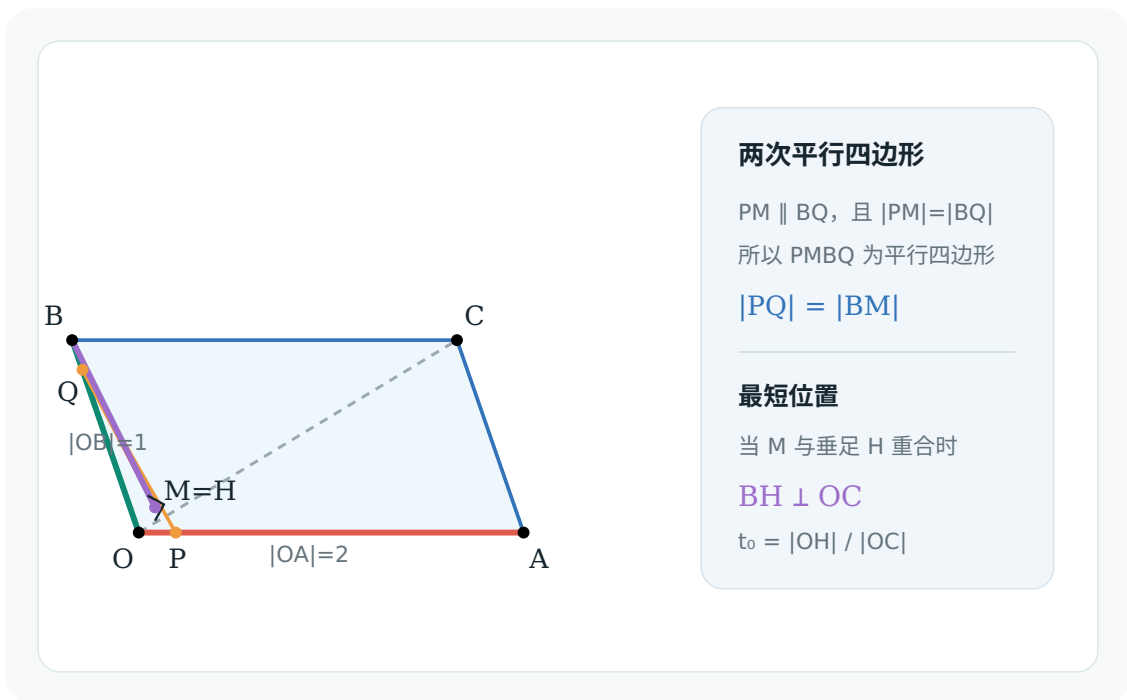
作平行四边形 $OACB$ ,过点 $P$ 作 $PM \parallel OB$ 交 $OC$ 与点 $M$ ,则 $PM \parallel BQ$ 且 $|PM| = |BQ| = t$ ,又出现了一个平行四边形 $PMBQ$ .

所求 $|PQ| = |BM|$ ,当 $|BM|$ 最短,即 $BM \perp OC$ 时, $|PQ|$ 取得最小值.

作 $BH \perp OC$ ,须知 $t_0 = \frac{|OP|}{|OA|} = \frac{|OH|}{|OC|}$ .

对直角三角形 $OHB$ ,  $CHB$ 使用勾股定理:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} OH^2 + HB^2 = OB^2 = 1, \\ CH^2 + HB^2 = BC^2 = 4 \end{cases} \\
&CH^2 - OH^2 = 3 \\
&(OC - OH)^2 - OH^2 = 3 \\
&OC^2 - 2OC \cdot OH = 3 \\
&OC^2(1 - 2t_0) = 3 \\
&OC^2 = \frac{3}{1 - 2t_0} \in (3, 5) \\
&OC^2 = OB^2 + BC^2 - 2OB \cdot OC \cos(\pi - \theta) \\
&= 5 + 4\cos\theta \\
&\cos\theta \in (-\frac{1}{2}, 0) \iff \theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})
\end{aligned}$$



例题 6.3 的平行四边形构造

**例题 6.4**

在直角三角形  $\triangle ABC$  中,  $AB = 4$ ,  $AC = 3$ ,  $\angle A = \frac{\pi}{2}$ ,

$$\vec{AP} = m\vec{PB}, \quad \vec{AQ} = n\vec{QC}, \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}.$$

$M$  是  $BC$  的中点. 对任意  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$|\lambda \vec{QP} + \vec{QM}|$$

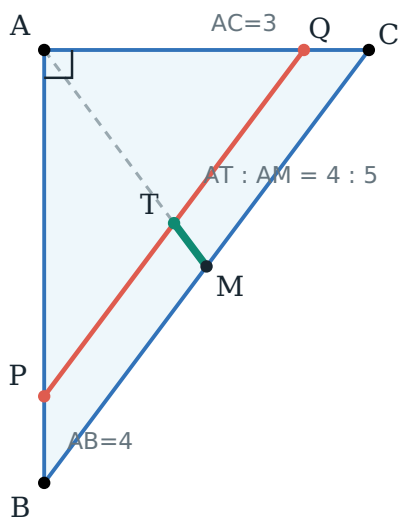
的最小值记为  $f(m)$ , 则当  $m > 0$  时,  $f(m)$  的最大值为 \_\_\_\_。

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{AP} + \vec{PB} = \frac{m+1}{m} \vec{AP} \\ \vec{AC} &= \vec{AQ} + \vec{QC} = \frac{n+1}{n} \vec{AQ} \\ \vec{AB} + \vec{AC} &= \left(1 + \frac{1}{m}\right) \vec{AP} + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \vec{AQ} \\ \left(1 + \frac{1}{m}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \frac{5}{2} \\ \frac{2}{5} \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right) \vec{AP} + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \vec{AQ}\right] &= \frac{2}{5} (\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{4}{5} \vec{AM} \end{aligned}$$

这意味着如果取  $T$  点, 使得  $\frac{AT}{AM} = \frac{4}{5}$ , 则有  $P, Q, T$  三点共线.

$\min_{\lambda \in \mathbb{R}} |\lambda \vec{QP} + \vec{QM}|$  等于直线  $PQ$  到点  $M$  的距离, 构建不等式:

$$\begin{aligned} \min_{\lambda \in \mathbb{R}} |\lambda \vec{QP} + \vec{QM}| &= d(M, PQ) \\ &\leq |TM| \\ &= \frac{1}{5} |AM| = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



#### 条件锁定一条过定点的直线

由  $1/m + 1/n = 1/2$

可得  $P$ 、 $Q$ 、 $T$  三点共线

$$AT / AM = 4 / 5$$

#### 目标量的几何意义

$$\min |\lambda \vec{QP} + \vec{QM}| = d(M, PQ)$$

$$d(M, PQ) \leq MT = 1/2$$

例题 6.4 的定比分点构型

## 数量积的几何化

极化恒等式: 在  $\triangle ABC$  中,  $M$  为边  $BC$  中点, 则:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (\vec{AM} + \vec{MB})(\vec{AM} - \vec{MB}) = |AM|^2 - |MB|^2$$

### 例题 6.5

(清华大学) 在  $\triangle ABC$  中,  $AC = BC$ ,  $P_1, P_2, P_3$  为  $AB$  上的点, 且

$$P_1B = \frac{1}{2}P_2B = \frac{1}{4}P_3B = \frac{1}{8}AB.$$

设

$$I_k = \vec{P_k B} \cdot \vec{P_k C} \quad (k = 1, 2, 3),$$

则 ( )

A.  $I_1 < I_2 < I_3$

B.  $I_1 < I_3 < I_2$

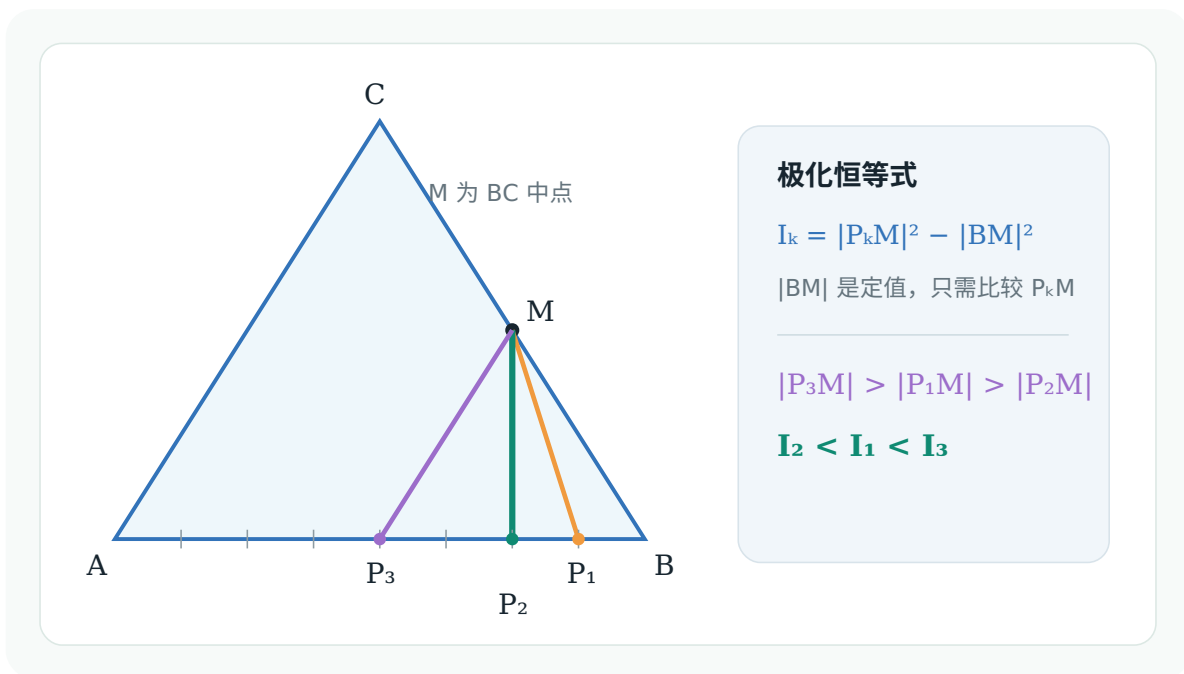
C.  $I_3 < I_2 < I_1$

D.  $I_2 < I_1 < I_3$

由几何关系,  $P_1, P_2, P_3$  都是  $AB$  上的八等分点.

取  $BC$  中点  $M$ , 考虑极化恒等式  $I_k = \vec{P_k B} \cdot \vec{P_k C} = |P_k M|^2 - |BM|^2$  ( $k = 1, 2, 3$ ), 其中  $|BM|$  为一定值.

由图形比例:  $|P_3 M| > |P_1 M| > |P_2 M| \iff I_2 < I_1 < I_3$



例题 6.5 的极化恒等式构型

### 例题 6.6

在  $\triangle ABC$  中,  $P_0$  是边  $AB$  上一定点, 满足

$$P_0 B = \frac{1}{4} AB,$$

且对于边  $AB$  上任意一点  $P$ , 恒有

$$\vec{P B} \cdot \vec{P C} \geq \vec{P_0 B} \cdot \vec{P_0 C},$$

则 ( )

A.  $\angle ABC = 90^\circ$

B.  $\angle BAC = 90^\circ$

C.  $AB = AC$

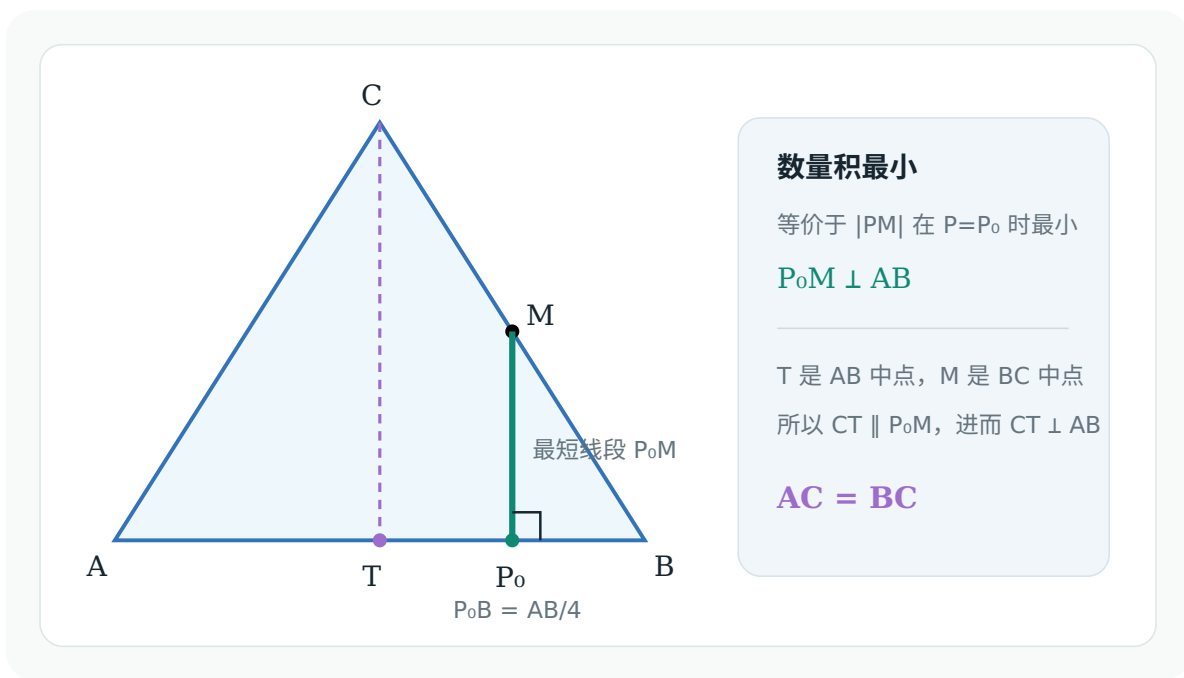
D.  $AC = BC$

$$\begin{aligned}\vec{P}B \cdot \vec{P}C &= |PM|^2 - |BM|^2 \\ &\geq \vec{P_0}B \cdot \vec{P_0}C = |P_0M|^2 - |BM|^2\end{aligned}$$

这表明  $P_0M$  是最短线段,  $P_0M \perp AB$ . 又注意到如果取  $AB$  中点  $T$ , 则  $TM$  为  $\triangle ABC$  中  $AC$  所对的中位线, 则  $CT \perp P_0M \implies CT \perp AB$ .

根据三线合一,  $AC = BC$ , 则 D 正确, AB 均错误.

若将  $\triangle ABC$  沿  $CT$  方向拉长, 则仍满足题目条件, 但选项 C 不一定正确, 故选 D



例题 6.6 的中点与垂线构型

### 例题 6.7

(清华大学) 向量  $\vec{a} \neq \vec{e}$ ,  $|\vec{e}| = 1$ . 若对任意  $t \in \mathbb{R}$ , 都有

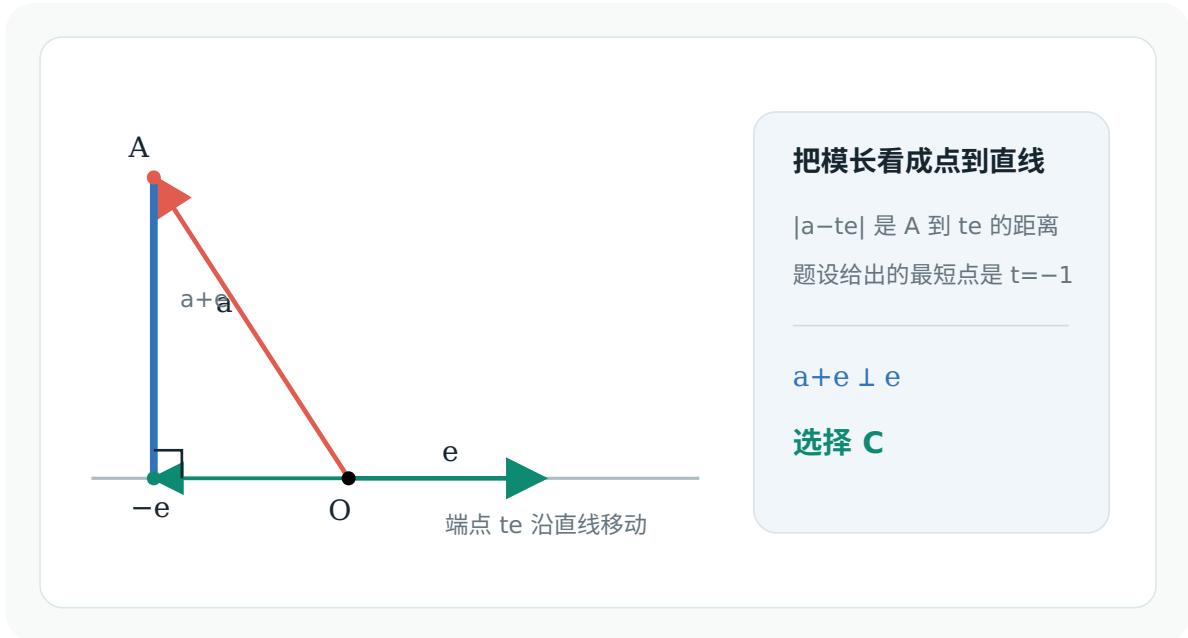
$$|\vec{a} - t\vec{e}| \geq |\vec{a} + \vec{e}|,$$

则 ( )

A.  $\vec{a} \perp \vec{e}$

- B.  $\vec{a} \perp (\vec{a} + \vec{e})$   
 C.  $\vec{e} \perp (\vec{a} + \vec{e})$   
 D.  $(\vec{a} - \vec{e}) \perp (\vec{a} + \vec{e})$

将向量  $\vec{a} \neq \vec{e}$  平移至共起点, 可知题目条件本质为  $\vec{e} \perp (\vec{a} + \vec{e})$



例题 6.7 的向量投影图

### 例题 6.8

在  $\triangle ABC$  中:

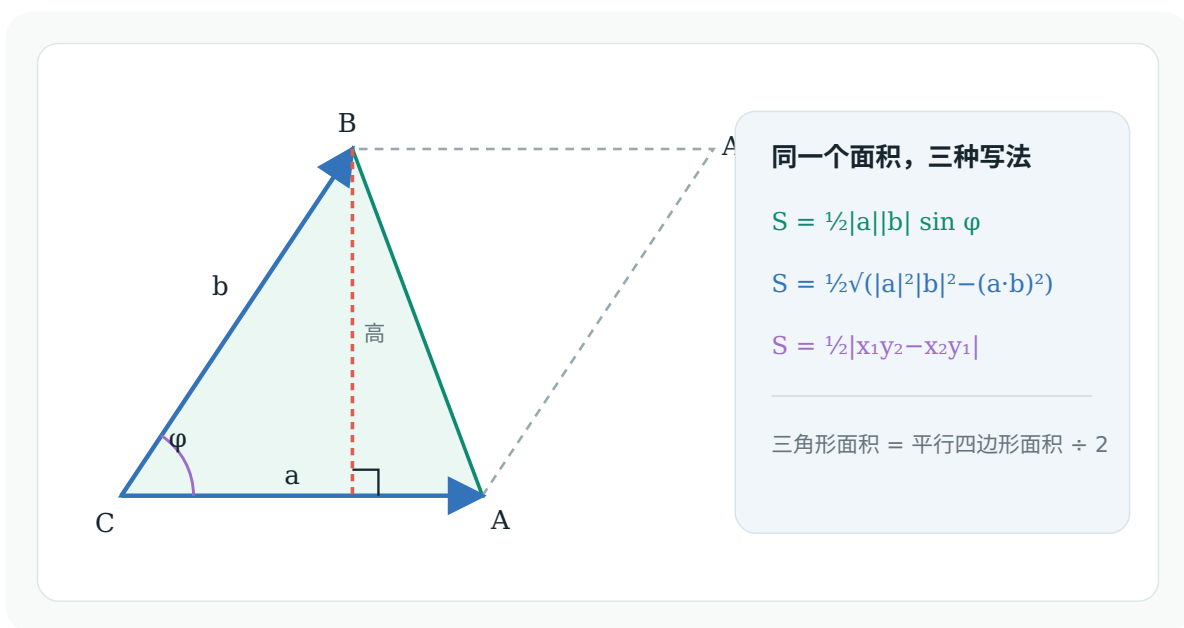
1. 若  $\vec{CA} = \vec{a}$ ,  $\vec{CB} = \vec{b}$ , 求证:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{(|\vec{a}| |\vec{b}|)^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}.$$

2. 若  $\vec{CA} = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{CB} = (x_2, y_2)$ , 求证:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|.$$

$$\begin{aligned}
 S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \\
 &= \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sqrt{1 - \cos^2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} \\
 &= \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sqrt{1 - \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right)^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|
 \end{aligned}$$



例题 6.8 的向量面积图

## 重心的向量刻画及其推广

### 例题 6.9

$\triangle ABC$  的重心为点  $M$ ，过点  $M$  的直线分别交  $AB$ ， $AC$  于点  $E$ ， $F$ 。若

$$AE = kAB, \quad AF = hAC,$$

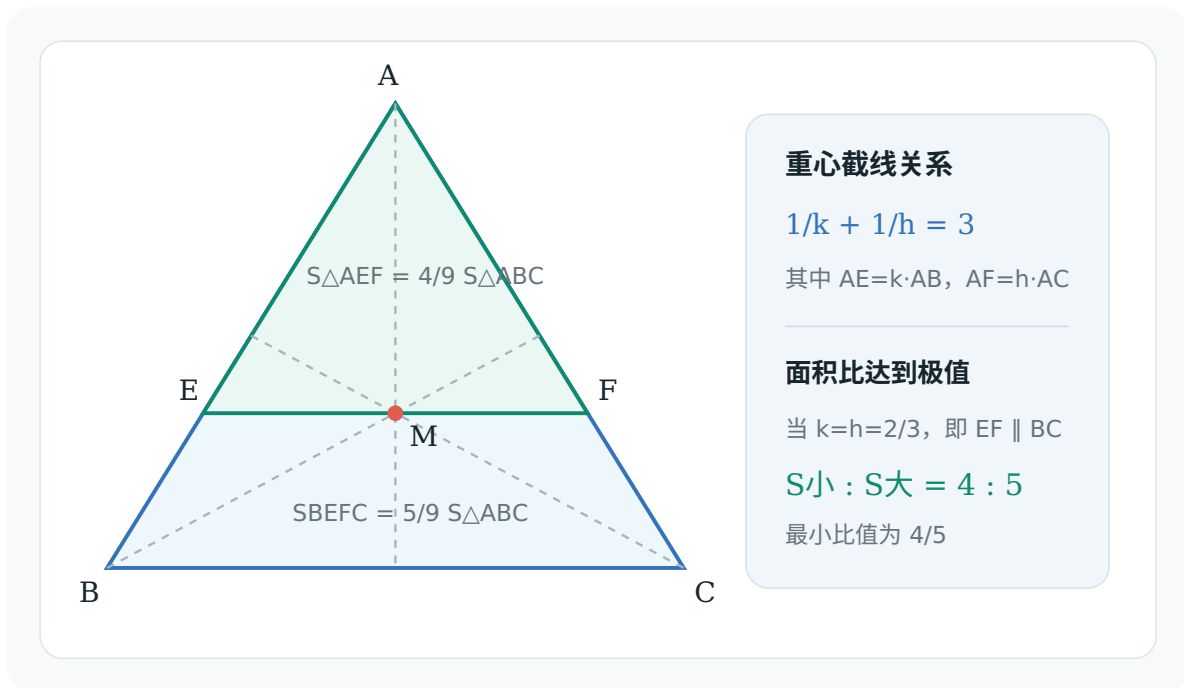
利用向量证明：

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{h} = 3.$$

$$\vec{AB} + \vec{AC} = 3\vec{AM}$$

$$\frac{1}{3k}\vec{AE} + \frac{1}{3h}\vec{AF} = \vec{AM}$$

由于点  $E, F, M$  共线, 则  $\frac{1}{3k} + \frac{1}{3h} = 1$ , 故  $\frac{1}{k} + \frac{1}{h} = 3$



例题 6.9 与 6.10 的重心截线图

### 例题 6.10

过  $\triangle ABC$  的重心作一条直线, 将  $\triangle ABC$  分成两部分, 则较小部分与较大部分的面积之比 ( )

- A. 最小值为  $\frac{3}{4}$
- B. 最小值为  $\frac{4}{5}$
- C. 最大值为  $\frac{4}{3}$
- D. 最大值为  $\frac{5}{4}$

本题的几何图形与例6.9师出同门,应考虑结论:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{AB}{AE} \frac{AC}{AF} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{h} \leq \left( \frac{\frac{1}{k} + \frac{1}{h}}{2} \right)^2 = \frac{9}{4}$$

当然,我们还需要确定  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AEF}}$  的下界:

$$\begin{aligned}
0 < h, k \leq 1 &\implies \left(\frac{1}{k} - 1\right)\left(\frac{1}{h} - 1\right) \geq 0 \\
\frac{1}{kh} &\geq \frac{1}{h} + \frac{1}{k} - 1 = 2 \\
\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AEF}} &\in \left[2, \frac{9}{4}\right] \\
S_{BEFC} &\geq S_{\triangle AEF} \\
\frac{S_{\triangle AEF} + S_{BEFC}}{S_{\triangle AEF}} &= 1 + \frac{S_{BEFC}}{S_{\triangle AEF}} \\
\frac{S_{BEFC}}{S_{\triangle AEF}} &\in \left[1, \frac{5}{4}\right] \\
\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{BEFC}} &\in \left[\frac{4}{5}, 1\right]
\end{aligned}$$

### 例题 6.11

设  $P_1, P_2, \dots, P_n$  是单位圆  $O$  内接正  $n$  边形的顶点,  $P$  是圆  $O$  上的任意点, 则

$$PP_1^2 + PP_2^2 + \dots + PP_n^2 =$$

(     )

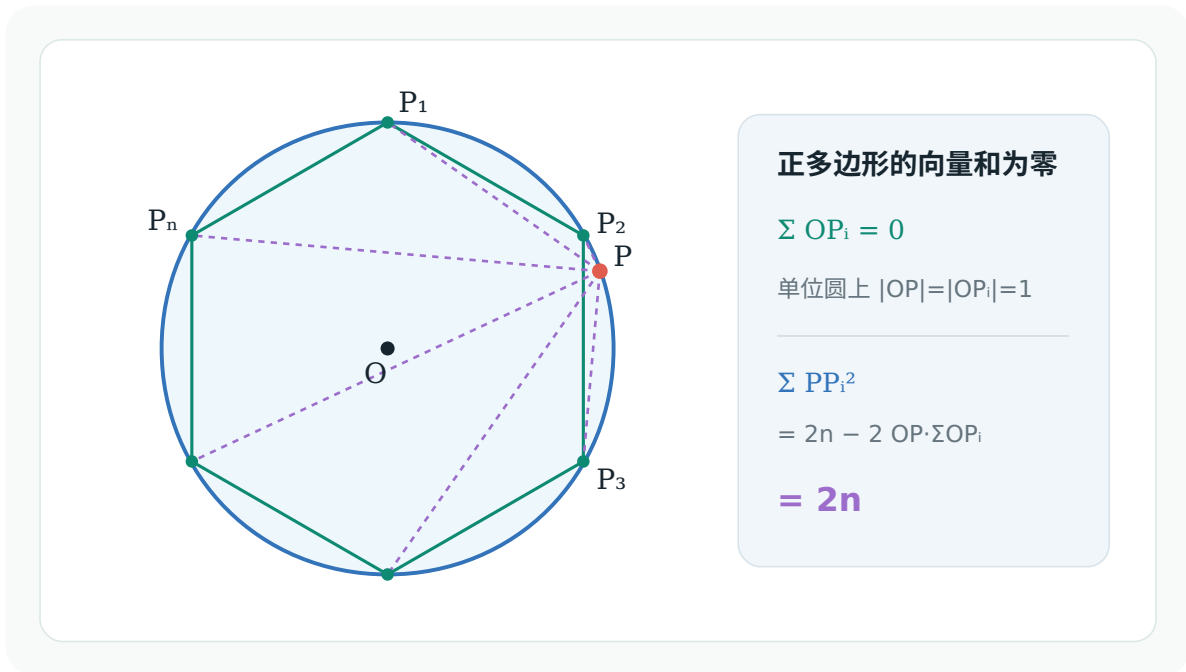
A. 0

B. 1

C.  $n$

D. 前三个答案都不对

$$\begin{aligned}
&PP_1^2 + PP_2^2 + \dots + PP_n^2 \\
&= \sum_{i=1}^n (\vec{OP} - \vec{OO_i})^2 \\
&= n(|OP|^2 + R)^2 - 2\vec{OP} \left( \sum_{i=1}^n \vec{OO_i} \right) \\
&= 2n - 2\vec{OP} \cdot \vec{0}
\end{aligned}$$



例题 6.11 的单位圆点系图

**例题 6.12**

(北京大学) 单位圆的内接五边形的所有边及所有对角线的长度的平方和的最大值为 ( )

- A. 15
- B. 20
- C. 25
- D. 前三个答案都不对

见微知著,我们从  $n = 3$  的情况开始研究.

在平面直角坐标系中,有三角形  $ABC$ ,考虑三条边的平方和:

$$\begin{aligned} & AB^2 + BC^2 + CA^2 \\ &= \sum_{\text{cyc}} [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] \\ &= 2 \sum_{\text{cyc}} (x_1^2 + y_1^2) - 2 \sum_{\text{cyc}} (x_1 x_2 + y_1 y_2) \end{aligned}$$

对于  $2 \sum_{\text{cyc}} (x_1 x_2 + y_1 y_2)$ ,我们注意到其交叉项的形式:

$$\begin{aligned}
 (x_1 + x_2 + x_3)^2 &= \sum_{\text{cyc}} x_1^2 + 2 \sum_{\text{cyc}} (x_1 x_2) \\
 (y_1 + y_2 + y_3)^2 &= \sum_{\text{cyc}} y_1^2 + 2 \sum_{\text{cyc}} (y_1 y_2) \\
 2 \sum_{\text{cyc}} (x_1 x_2 + y_1 y_2) &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (y_1 + y_2 + y_3)^2 - \sum_{\text{cyc}} (x_1^2 + y_1^2)
 \end{aligned}$$

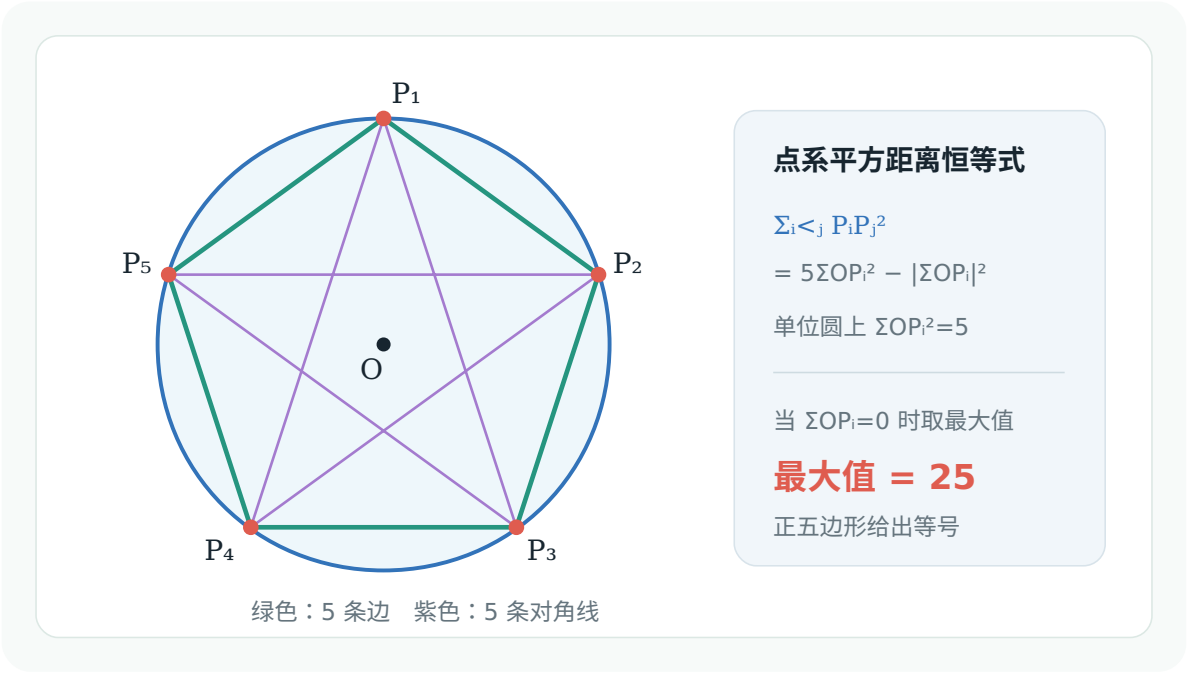
于是:

$$\begin{aligned}
 &AB^2 + BC^2 + CA^2 \\
 &= 3 \sum_{\text{cyc}} (x_1^2 + y_1^2) - (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (y_1 + y_2 + y_3)^2 \\
 &\geq 3 \sum_{\text{cyc}} (x_1^2 + y_1^2)
 \end{aligned}$$

显而易见,对于五边形的情况,只是系数不同:

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\text{cyc}} [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] \\
 &= 3 \sum_{\text{cyc}} (x_1^2 + y_1^2) - 2 \sum_{\text{cyc}} (x_1 x_2 + y_1 y_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{\text{cyc}} [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] &\geq 5 \sum_{\text{cyc}} (x_1^2 + y_1^2) \\
 &= 5 \cdot 5 \cdot 1 = 25
 \end{aligned}$$



例题 6.12 的单位圆内接五边形

命题背景

| 公式                                                                            | 建议名称       |
|-------------------------------------------------------------------------------|------------|
| $\sum_{i<j} P_i P_j^2 = n \sum O P_i^2 - \left\  \sum O \vec{P}_i \right\ ^2$ | 点系平方距离恒等式  |
| $\sum_{i<j} P_i P_j^2 = n \sum G P_i^2$                                       | 点系恒等式的重心形式 |
| $\sum P P_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i<j} P_i P_j^2 + n P G^2$                   | 广义莱布尼茨定理   |

例题 6.13

(清华大学)  $O$  为  $\triangle ABC$  内一点, 若

$$S_{\triangle AOB} : S_{\triangle BOC} : S_{\triangle AOC} = 4 : 3 : 2,$$

设

$$\vec{AO} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC},$$

则实数  $\lambda$  和  $\mu$  的值分别为 (     )

A.  $\frac{2}{9}, \frac{4}{9}$

B.  $\frac{4}{9}, \frac{2}{9}$

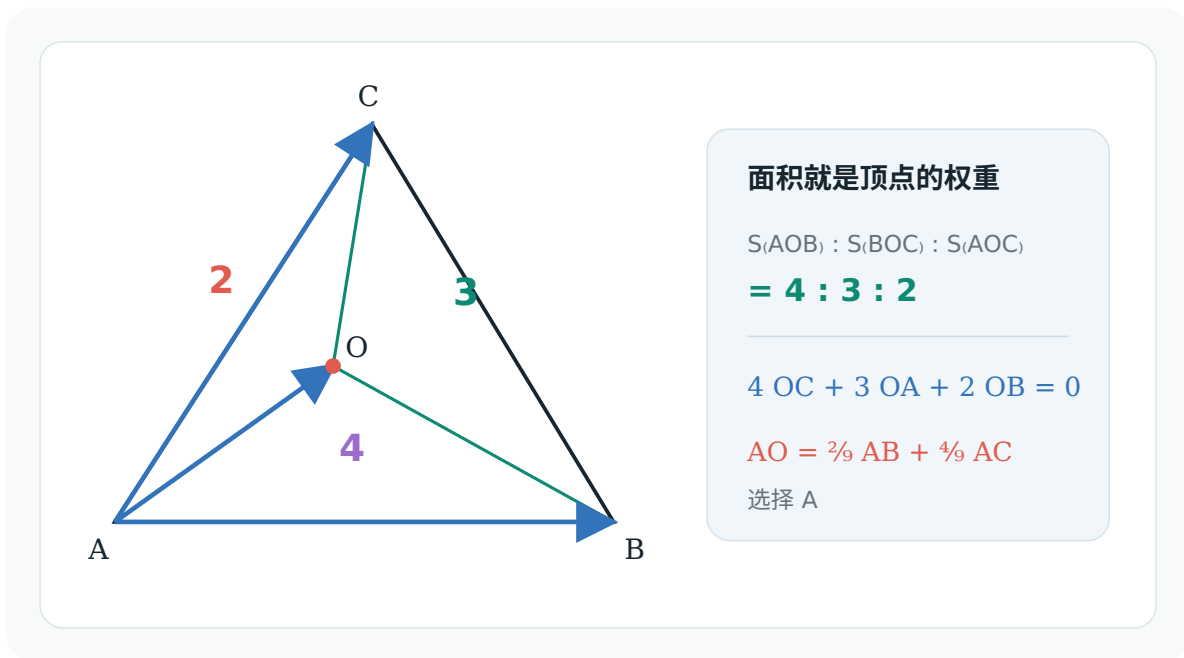
C.  $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}$

D.  $\frac{2}{9}, \frac{1}{9}$

由熟知的奔驰定理:

$$\begin{aligned} 4\vec{OC} + 3\vec{OA} + 2\vec{OB} &= \vec{0} \\ 4(\vec{AC} - \vec{AO}) - 3\vec{AO} + 2(\vec{AB} - \vec{AO}) &= \vec{0} \\ 9\vec{AO} &= 2\vec{AB} + 4\vec{AC} \\ \lambda &= \frac{2}{9}, \mu = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

该结论可以通过构造重心来证明,此处不加赘述.



例题 6.13 的面积权重与奔驰定理

### 例题 6.14

(清华大学)  $\triangle ABC$  中,  $AB = 2$ ,  $AC = 3$ ,  $BC = 4$ ,  $O$  为三角形内心。若

$$\vec{AO} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{BC},$$

则  $3\lambda + 6\mu = ( \quad )$

A. 1

B. 2

C. 3

## D. 4

对于内心,由内分三角形比,有结论:

$$\begin{aligned}
 a\vec{OA} + b\vec{OB} + c\vec{OC} &= \vec{0} \\
 4\vec{OA} + 3\vec{OB} + 2\vec{OC} &= \vec{0} \\
 -4\vec{AO} + 3(\vec{AB} - \vec{AO}) + 2(-\vec{AO} + \vec{AB} + \vec{BC}) &= \vec{0} \\
 9\vec{AO} &= 5\vec{AB} + 2\vec{BC} \\
 \lambda = \frac{5}{9}, \mu &= \frac{2}{9} \\
 3\lambda + 6\mu &= \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = 3
 \end{aligned}$$

或者考虑内心对应角平分线的性质: $AB, AC$ 方向的单位向量的矢量和与 $\vec{AO}$ 同向共线:

$$m\left(\frac{\vec{AB}}{2} + \frac{\vec{AC}}{3}\right) = \vec{AO}$$

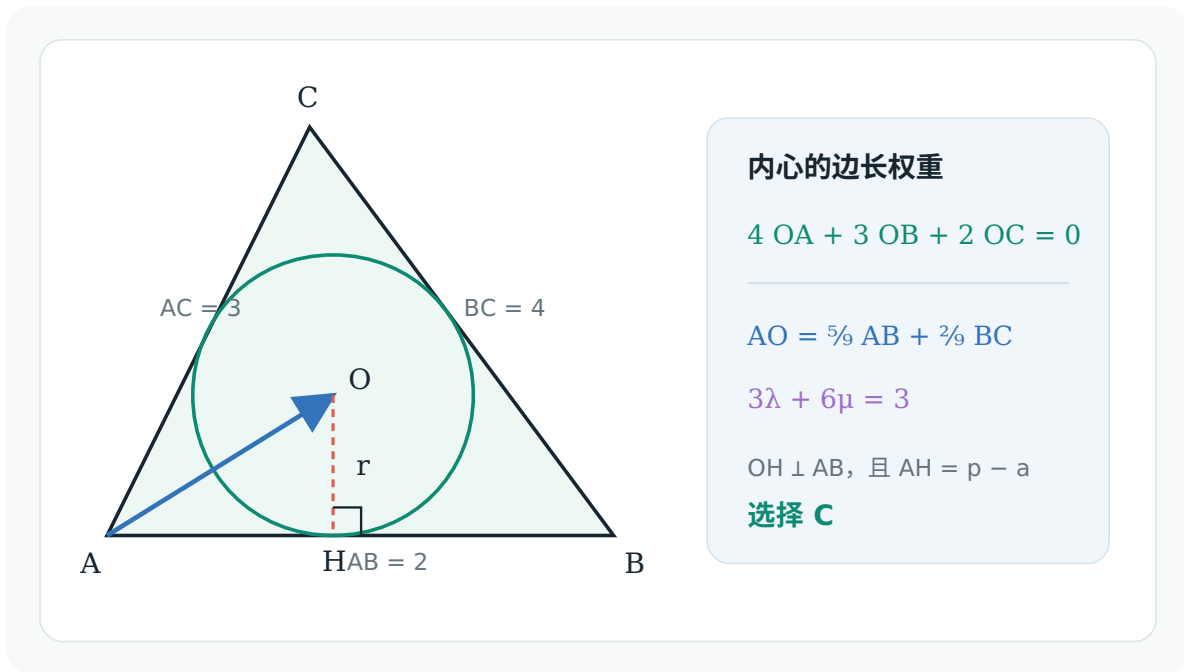
我们可以通过向量长度确定 $m$ .作 $OH \perp AB$ 与点 $H$ ,则:

$$\begin{aligned}
S_{\triangle ABC} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\
&= \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{15} \\
&= rp = \frac{9}{2}r \\
r &= \frac{1}{6}\sqrt{15}, AH = p - a = \frac{1}{2} \\
|\vec{AO}| &= \sqrt{r^2 + AH^2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \\
\left| \frac{\vec{AB}}{2} + \frac{\vec{AC}}{3} \right|^2 &= \left( \frac{\vec{AB}}{2} + \frac{\vec{AC}}{3} \right)^2 \\
&= \frac{\vec{AB}^2}{4} + \frac{\vec{AC}^2}{9} + \frac{1}{3}\vec{AB} \cdot \vec{AC} \\
&= 1^2 + 1^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \\
&= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\
\Rightarrow \left| \frac{\vec{AB}}{2} + \frac{\vec{AC}}{3} \right| &= \frac{\sqrt{6}}{2} \\
\Rightarrow m &= \frac{2}{3} \\
\vec{AO} &= \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{9}\vec{AC} \\
&= \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{9}(\vec{AB} + \vec{BC}) \\
&= \frac{5}{9}\vec{AB} + \frac{2}{9}\vec{BC}
\end{aligned}$$

再或者,可以利用对 $\vec{AO}$ 算两次:

$$\begin{aligned}
\vec{AO} &= \lambda\vec{AB} + \mu\vec{BC} \\
&= \vec{AB} + \vec{BO} \\
\vec{BO} &= (\lambda - 1)\vec{AB} + \mu\vec{BC} \\
&= (-2\lambda + 2)\frac{\vec{BA}}{2} + 4\mu\frac{\vec{BC}}{4} \\
(-2\lambda + 2) &= 4\mu \\
3\lambda + 6\mu &= 3
\end{aligned}$$

可见 $3\lambda + 6\mu$ 的系数绝非随意.



例题 6.14 的内心向量模型

**例题 6.15**

(北京大学) 已知  $H$  是  $\triangle ABC$  的垂心, 且

$$2\vec{HA} + 3\vec{HB} + 4\vec{HC} = \vec{0},$$

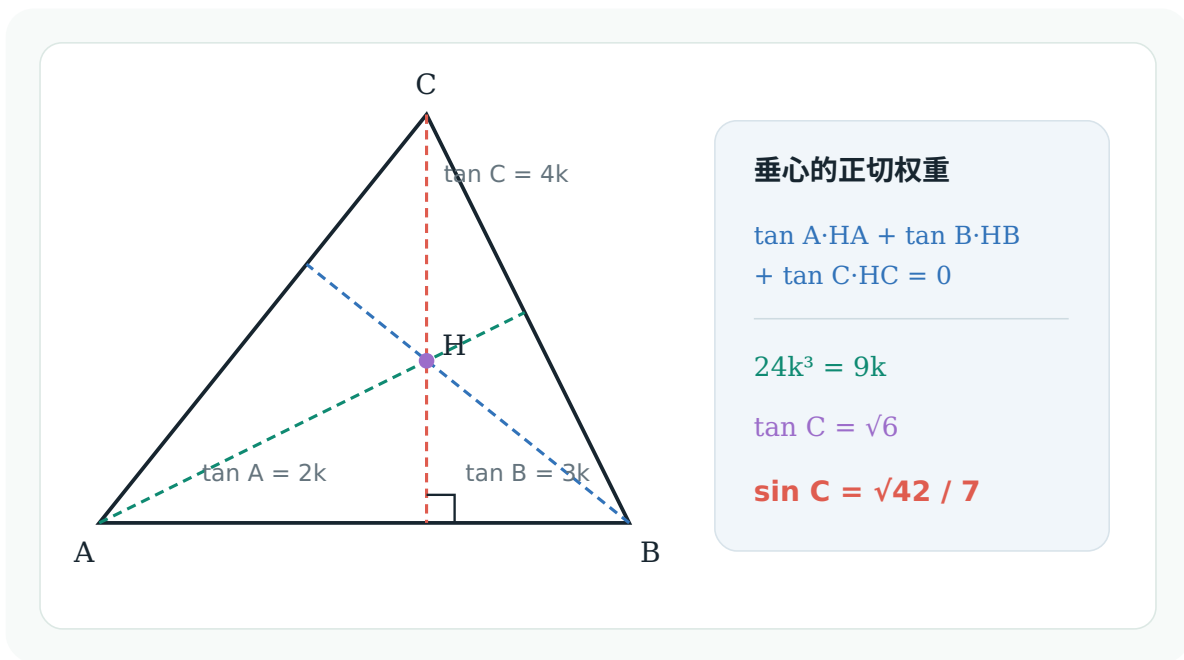
则  $\triangle ABC$  的最大内角的正弦值是 \_\_\_\_\_。

对于垂心, 三个分三角形面积比为  $\tan A, \tan B, \tan C$ , 故列出奔驰定理:

$$\begin{aligned} \tan A \vec{HA} + \tan B \vec{HB} + \tan C \vec{HC} &= \vec{0} \\ \tan A &= 2k, \tan B = 3k, \tan C = 4k \\ \tan A \tan B \tan C &= \tan A + \tan B + \tan C \\ 24k^3 &= 9k, k = \pm \frac{\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

显然,  $k = -\frac{\sqrt{6}}{4}$  不是合理的结果, 应当舍去:

$$\begin{aligned} k &= \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\pi}{2} > C > B > A > 0 \\ \tan C &= \sqrt{6}, \sin C = \frac{\tan C}{\sqrt{1 + \tan^2 C}} = \frac{\sqrt{42}}{7} \end{aligned}$$



例题 6.15 的垂心与正切权重

**例题 6.16**

求证:  $\triangle ABC$  的外心  $O$ 、重心  $G$ 、垂心  $H$  在同一直线上, 且

$$OG : GH = 1 : 2.$$

在直角三角形中, 通过建系可以完成证明:

在非直角三角形中, 综合使用三心的欧拉定理:

$$\begin{aligned} \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} &= \vec{0} \\ \sin 2A \vec{OA} + \sin 2B \vec{OB} + \sin 2C \vec{OC} &= \vec{0} \\ \tan A \vec{HA} + \tan B \vec{HB} + \tan C \vec{HC} &= \vec{0} \\ \vec{GA} + (\vec{GA} + \vec{AB}) + (\vec{GA} + \vec{AC}) &= \vec{0} \\ \vec{AG} &= \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{3} \end{aligned}$$

同理可以写出:

$$\begin{aligned} \vec{AO} &= \frac{\sin 2B \vec{AB} + \sin 2C \vec{AC}}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} \\ \vec{AH} &= \frac{\tan B \vec{AB} + \tan C \vec{AC}}{\tan A + \tan B + \tan C} \end{aligned}$$

接下来计算  $\vec{OG}, \vec{GH}$ :

$$\begin{aligned}
\vec{OG} &= \vec{AG} - \vec{AO} \\
&= \frac{\sin 2A - 2\sin 2B + \sin 2C}{3(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)} \vec{AB} + \frac{\sin 2A + \sin 2B - 2\sin 2C}{3(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)} \vec{AC} \\
\vec{GH} &= \vec{AH} - \vec{AG} \\
&= \frac{2\tan B - \tan A - \tan C}{3(\tan A + \tan B + \tan C)} \vec{AB} + \frac{2\tan C - \tan A - \tan B}{3(\tan A + \tan B + \tan C)} \vec{AC}
\end{aligned}$$

不难看出,只要有  $\frac{2(\sin 2A - 2\sin 2B + \sin 2C)}{3(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)} = \frac{2\tan B - \tan A - \tan C}{3(\tan A + \tan B + \tan C)}$  即可

$$\begin{aligned}
&\frac{2\tan B - \tan A - \tan C}{3(\tan A + \tan B + \tan C)} \\
&= \frac{2\tan B - \tan A - \tan C}{3\tan A \tan B \tan C} \\
&= \frac{1}{3} \left( \frac{2}{\tan A \tan C} - \frac{1}{\tan B \tan C} - \frac{1}{\tan A \tan B} \right)
\end{aligned}$$

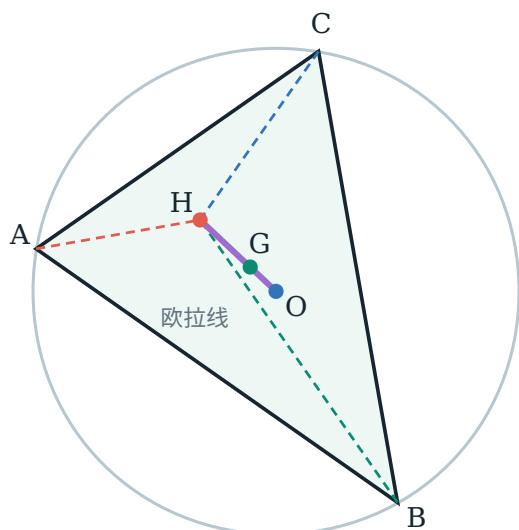
$$\begin{aligned}
&\frac{2(\sin 2A - 2\sin 2B + \sin 2C)}{3(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)} \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{(\sin 2A - 2\sin 2B + \sin 2C)}{(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)} \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A} - 2\frac{2\tan B}{1+\tan^2 B} + \frac{2\tan C}{1+\tan^2 C}}{\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A} + \frac{2\tan B}{1+\tan^2 B} + \frac{2\tan C}{1+\tan^2 C}} \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{\tan A}{1+\tan^2 A} - 2\frac{\tan B}{1+\tan^2 B} + \frac{\tan C}{1+\tan^2 C}}{\frac{\tan A}{1+\tan^2 A} + \frac{\tan B}{1+\tan^2 B} + \frac{\tan C}{1+\tan^2 C}} \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{\tan A(1+\tan^2 B)(1+\tan^2 C) - 2\tan B(1+\tan^2 C)(1+\tan^2 A) + \tan C(1+\tan^2 A)(1+\tan^2 B)}{\tan A(1+\tan^2 B)(1+\tan^2 C) + \tan B(1+\tan^2 C)(1+\tan^2 A) + \tan C(1+\tan^2 A)(1+\tan^2 B)} \\
&= \frac{1}{3} \left( \frac{2}{\tan A \tan C} - \frac{1}{\tan B \tan C} - \frac{1}{\tan A \tan B} \right)
\end{aligned}$$

实际上,不如分离常数:

$$\begin{aligned}
&\frac{2\tan B - \tan A - \tan C}{3(\tan A + \tan B + \tan C)} \\
&= \frac{2}{3} - \frac{\tan A + \tan C}{\tan A + \tan B + \tan C} \\
&\quad \frac{2(\sin 2A - 2\sin 2B + \sin 2C)}{3(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)} \\
&= \frac{2}{3} - \frac{2\sin 2B}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}
\end{aligned}$$

问题转化为证明:

$$\begin{aligned}
 \frac{\tan A + \tan C}{\tan A + \tan B + \tan C} &= \frac{2 \sin 2B}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} \\
 LHS &= \frac{\tan A + \tan C}{\tan A \tan B \tan C} \\
 &= \frac{1}{\tan B \tan C} + \frac{1}{\tan A \tan B} \\
 &= 1 - \frac{1}{\tan A \tan C} \\
 RHS &= \frac{2 \sin 2B}{2 \sin(A+C) \cos(A-C) + 2 \sin B \cos B} \\
 &= \frac{2 \sin 2B}{2 \sin B (\cos B + \cos(A-C))} \\
 &= \frac{2 \sin 2B}{2 \sin B [-\cos(A+C) + \cos(A-C)]} \\
 &= \frac{2 \sin 2B}{4 \sin A \sin B \sin C} \\
 &= \frac{\sin 2B}{2 \sin A \sin B \sin C} \\
 &= \frac{\sin A \sin C}{\cos B} \\
 &= \frac{\sin A \sin C - \cos A \cos C}{\sin A \sin C} = 1 - \frac{1}{\tan A \tan C}
 \end{aligned}$$



**O — G — H**

外心    重心    垂心

$$OG : GH = 1 : 2$$

$$GH = 2 OG$$

三心共线，且 G 靠近 O

这就是三角形的欧拉线

例题 6.16 的欧拉线



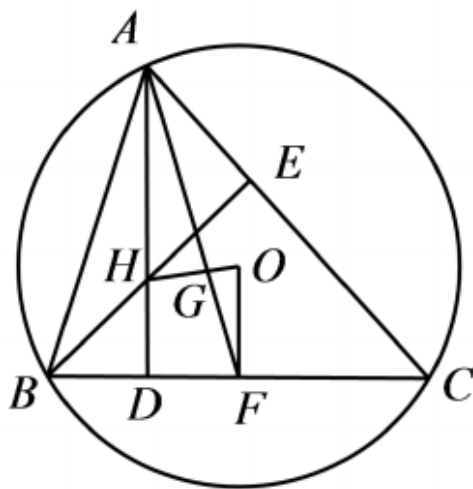
$$\frac{AG'}{G'M} = \frac{G'H}{G'O} = \frac{AH}{OM} = 2$$

这表明,点 $G'$ 是三角形 $\triangle ABC$ 中 $BC$ 边上中线上,靠近 $BC$ 边的三等分点,也就是重心 $G$ .

并且, $2 = \frac{G'H}{G'O} = \frac{GH}{GO}$ , Q.E.D

### 例题 6.17

如图,  $\triangle ABC$  的两条高线  $AD$ ,  $BE$  交于点  $H$ , 其外接圆圆心为  $O$ 。过点  $O$  作  $OF \perp BC$ , 垂足为  $F$ , 直线  $OH$  与  $AF$  相交于点  $G$ , 则  $\triangle OFG$  与  $\triangle GAH$  的面积之比为 \_\_\_\_。



例题 6.17 几何示意图

由欧拉线经典结论: $2OG = GH$ 知: $\triangle OFG$ 和 $\triangle GAH$ 相似比为 $1:2$ ,则面积比为 $1:4$

## 内积不等式与高维视角

### 例题 6.18

用向量方法证明: 对于任意的  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , 恒有不等式

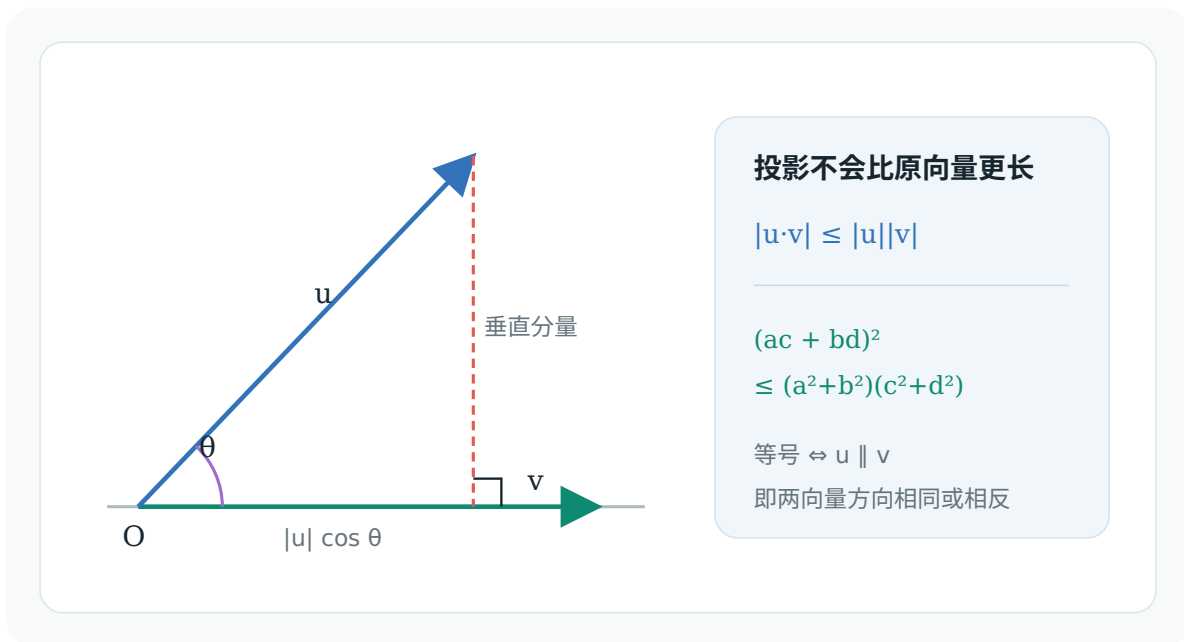
$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

设向量  $\vec{u} = (a, b)$ ,  $\vec{v} = (c, d)$ , 则:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| |\vec{v}|$$

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

当且仅当  $\vec{u} \parallel \vec{v}$  时等号成立.



例题 6.18 的柯西不等式几何图

### 例题 6.19

(清华大学) 已知向量

$$\vec{a} = (0, 1), \quad \vec{b} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad \vec{c} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

且

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = (1, 1),$$

则  $x^2 + y^2 + z^2$  的最小值为 ( )

- A. 1
- B.  $\frac{4}{3}$
- C.  $\frac{3}{2}$
- D. 2

容易知道变量间的依赖关系: 两个自由度,  $y, z$  确定后  $x$  唯一确定.

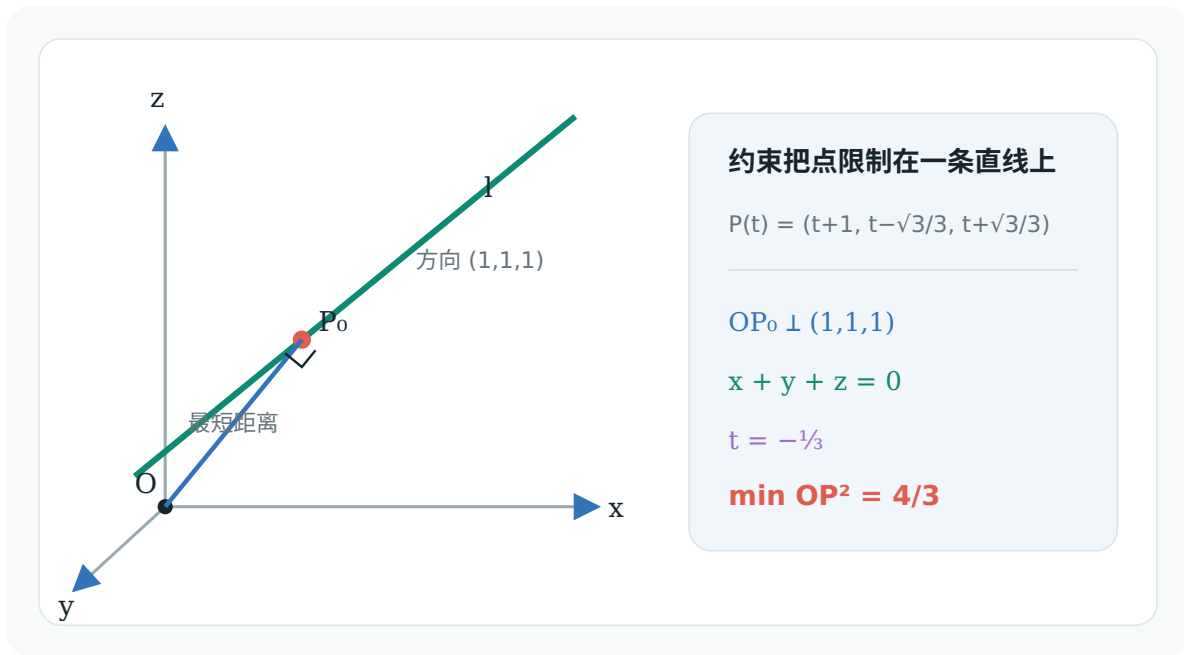
$$\begin{aligned}
& -\frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 1 \\
& x - \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 1 \\
& x = \frac{y+z}{2} + 1, z - y = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\
& \implies x = y + \frac{\sqrt{3}+3}{3} \\
& x^2 + y^2 + z^2 \\
& = \left(y + \frac{\sqrt{3}+3}{3}\right)^2 + y^2 + \left(y + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \\
& = 3y^2 + 2(\sqrt{3}+1)y + \frac{24+6\sqrt{3}}{9} \\
& \geq \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

尊重 $y, z$ 内禀的对称性,可以简化计算:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} z = t + \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ y = t - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \\
& x = t + 1 \\
& x^2 + y^2 + z^2 \\
& = (t+1)^2 + \left(t + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(t - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \\
& = 3t^2 + 2t + \frac{5}{3} \geq \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

考虑几何性质:点 $A(x, y, z)$ 在空间中的轨迹为一条方向向量为 $(1, 1, 1)$ 的直线 $l$ ,则当 $OA \perp l$ 时,  
 $x^2 + y^2 + z^2 = OA^2$ 取得最小值:

$$\begin{aligned}
& (x, y, z) \cdot (1, 1, 1) = 0 \\
& x + y + z = 0 \\
& 3t + 1 = 0 \\
& t = -\frac{1}{3} \\
& \begin{cases} x = \frac{2}{3}, \\ y = \frac{\sqrt{3}-1}{3} \\ z = \frac{-\sqrt{3}-1}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$



例题 6.19 的三维直线最短距离模型

**例题 6.20**

(清华大学) 已知  $\vec{a}, \vec{b}$  为平面上的单位向量,  $|\vec{c}| = \sqrt{26}$ , 且  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$ , 则

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| + |\vec{b} \cdot \vec{c}|$$

的最大值为 \_\_\_\_。

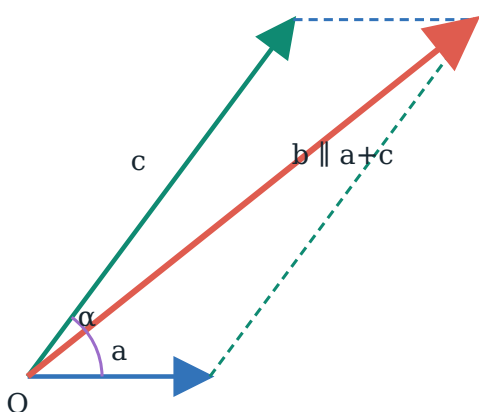
$$\begin{aligned} & |\vec{a} \cdot \vec{b}| + |\vec{b} \cdot \vec{c}| \\ &= |\vec{b}|(|\vec{a}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + |\vec{c}| \cos \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle|) \\ &= |\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| + \sqrt{26} |\cos \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle| \end{aligned}$$

根据对称性知, 最大值在  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle, \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle < \frac{\pi}{2}$  时取得.

$$\begin{aligned} & \cos \theta + \sqrt{26} \cos(\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \theta) \\ &= \cos \theta + \sqrt{26}(\cos \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \cos \theta + \sin \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \sin \theta) \\ &= \cos \theta + \sqrt{26} \left( \frac{1}{\sqrt{26}} \cos \theta + \frac{5}{\sqrt{26}} \sin \theta \right) \\ &= 2 \cos \theta + 5 \sin \theta \leq \sqrt{29} \end{aligned}$$

或者, 引入参数  $\lambda, \mu$  以取去绝对值:

$$\begin{aligned}
 & |\vec{a} \cdot \vec{b}| + |\vec{b} \cdot \vec{c}| \\
 &= \lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \mu \vec{b} \cdot \vec{c} \\
 &= \vec{b} \cdot (\lambda \vec{a} + \mu \vec{c}) \\
 &\leq |\vec{b}| |\lambda \vec{a} + \mu \vec{c}| \\
 &= \max\{|\vec{a} - \vec{c}|, |\vec{a} + \vec{c}|\} = \sqrt{29}
 \end{aligned}$$



绝对值对应四种符号组合

$$\max |\vec{b} \cdot (\pm \vec{a} \pm \vec{c})|$$

比较  $|\vec{a} + \vec{c}|$  与  $|\vec{a} - \vec{c}|$

$$|\vec{a} + \vec{c}|^2 = 1 + 26 + 2 = 29$$

$$\cos \alpha = 1/\sqrt{26}$$

最大值  $\sqrt{29}$

例题 6.20 的向量合成模型

### 例题 6.21

已知  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  为单位向量, 且

$$|3\vec{a} - 5\vec{b}| = 7,$$

则

$$|2\vec{a} - \vec{c}| + |\vec{b} - 2\vec{c}|$$

的最小值为 ( )

A. 2

B.  $2\sqrt{3}$

C. 4

D. 6

核心在于消去  $\vec{c}$ , 这里需要一个交换系数的帽子戏法:

注意到:

$$\begin{aligned} |\vec{b} - 2\vec{c}|^2 &= 5 - 4\vec{b} \cdot \vec{c} \\ | - 2\vec{b} + \vec{c} |^2 &= 5 - 4\vec{b} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

同理  $|2\vec{a} - \vec{c}| = | - \vec{a} + 2\vec{c}|$

$$\begin{aligned} &|2\vec{a} - \vec{c}| + |\vec{b} - 2\vec{c}| \\ &= |2\vec{a} - \vec{c}| + | - 2\vec{b} + \vec{c}| \\ &\geq 2|\vec{a} - \vec{b}| \end{aligned}$$

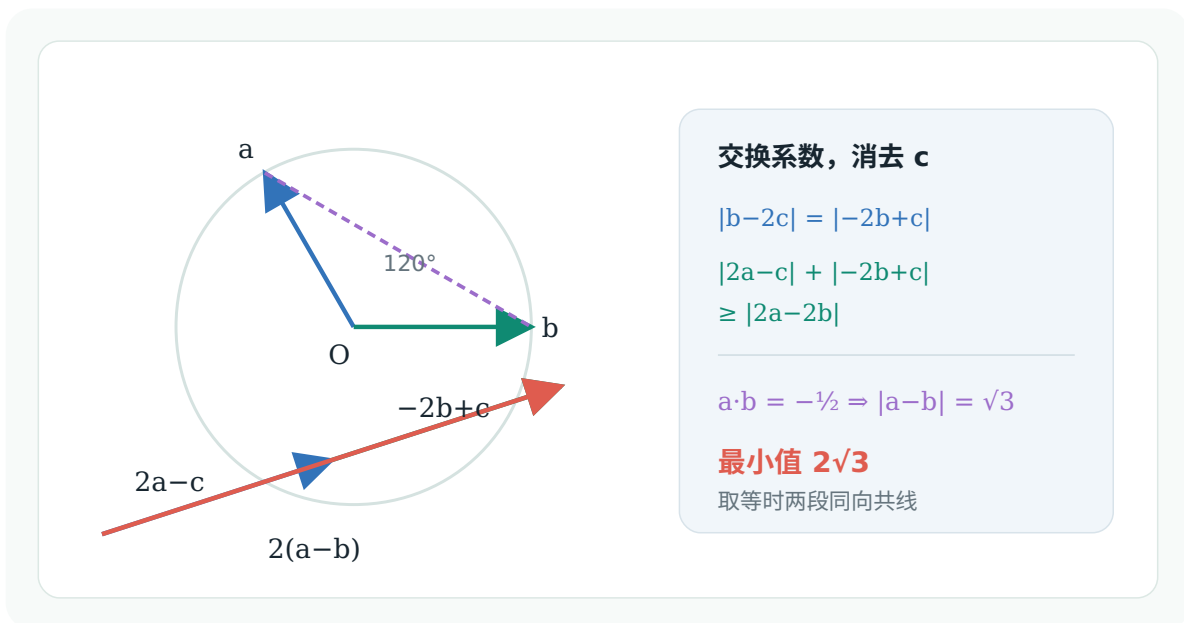
$$\begin{aligned} &|2\vec{a} - \vec{c}| + |\vec{b} - 2\vec{c}| \\ &= | - \vec{a} + 2\vec{c}| + |\vec{b} - 2\vec{c}| \\ &\geq |\vec{b} - \vec{a}| \end{aligned}$$

显然,  $2|\vec{b} - \vec{a}|$  是下界.

$$\begin{aligned} |3\vec{a} - 5\vec{b}| &= 7 \\ 34 - 30\vec{a} \cdot \vec{b} &= 49 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= -\frac{1}{2} \\ |\vec{b} - \vec{a}|^2 &= 2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \\ |2\vec{a} - \vec{c}| + |\vec{b} - 2\vec{c}| \\ &\geq 2|\vec{b} - \vec{a}| = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

验证取等条件:

$$\begin{aligned} 2\vec{a} - \vec{c} &= \lambda(-2\vec{b} + \vec{c}), \lambda > 0 \\ \vec{c} &= 2\frac{\vec{a} + \lambda\vec{b}}{\lambda + 1} \\ |\vec{c}|^2 &= 4\left[\left(\frac{|\vec{a}|}{\lambda + 1}\right)^2 + \frac{2\lambda}{(\lambda + 1)^2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \left(\frac{\lambda|\vec{b}|}{\lambda + 1}\right)^2\right] \\ &= 4\left[\frac{1}{(\lambda + 1)^2} - \frac{\lambda}{(\lambda + 1)^2} + \frac{\lambda^2}{(\lambda + 1)^2}\right] = 1 \\ 4(\lambda^2 - \lambda + 1) &= (\lambda + 1)^2 \\ (\lambda - 1)^2 &= 0 \iff \lambda = 1 \end{aligned}$$



例题 6.21 的交换系数与三角不等式

**例题 6.22**

已知  $\triangle ABC$  满足

$$\frac{3\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{2\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = \frac{\sqrt{19}(\vec{AB} + \vec{AC})}{|\vec{AB} + \vec{AC}|},$$

点  $D$  为线段  $AB$  上一动点。若

$$\vec{DA} \cdot \vec{DC}$$

的最小值为  $-3$ ，则  $\triangle ABC$  的面积  $S = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

考虑两向量相等的必要条件:模长相等

$$\begin{aligned} \frac{3\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{2\vec{AC}}{|\vec{AC}|} &= \frac{\sqrt{19}(\vec{AB} + \vec{AC})}{|\vec{AB} + \vec{AC}|} \\ \Rightarrow 9 + 4 + 12 \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} \cdot \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} &= 19 \\ \cos \langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

再考虑系数对应相同:平面向量基本定理

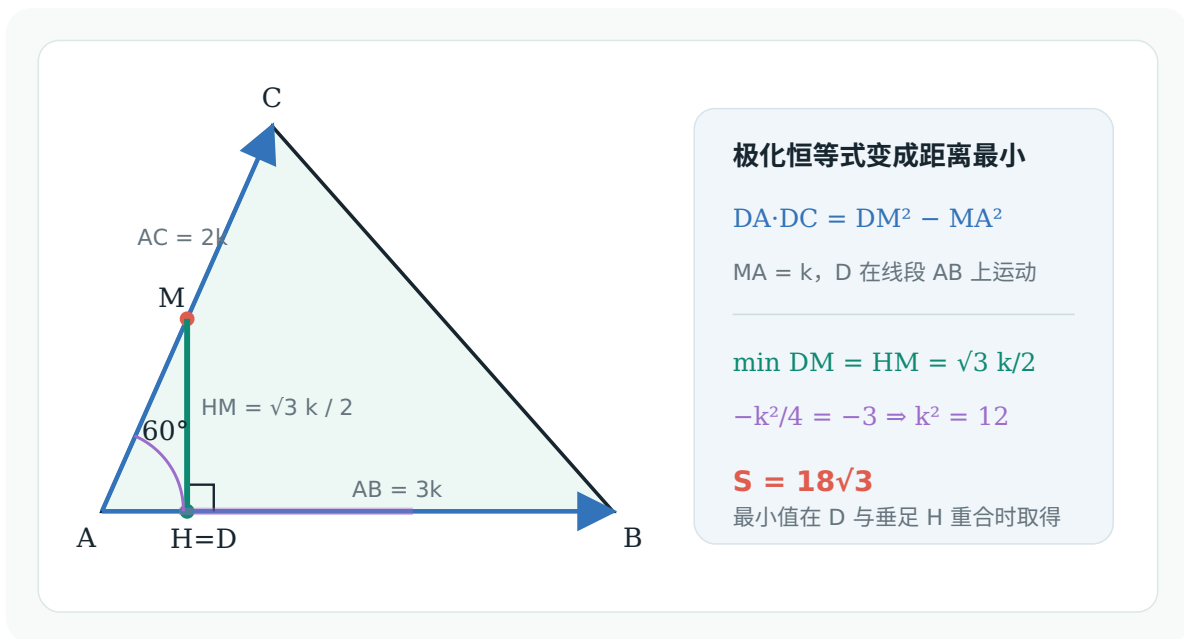
$$\frac{3}{|\vec{AB}|} = \frac{\sqrt{19}}{|\vec{AB} + \vec{AC}|} = \frac{2}{|\vec{AC}|}$$

$$|\vec{AB}| = 3k, |\vec{AC}| = 2k$$

紧接着,用极化恒等式化简条件  $\vec{DA} \cdot \vec{DC}$ : 取  $AC$  中点  $M$ , 作  $DH \perp AB$  于点  $H$ .

$$\begin{aligned} \vec{DA} \cdot \vec{DC} &= D\vec{M}^2 - M\vec{A}^2 \\ &= |DM|^2 - k^2 \\ &\geq |HM|^2 - k^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k\right)^2 - k^2 = -\frac{1}{4}k^2 = -3 \\ &\implies k^2 = 12 \end{aligned}$$

进而得到  $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} k^2 = 18\sqrt{3}$



例题 6.22 的中点与最短距离模型