

[2027强基计划]三角函数(II)

通过十四道典型例题深入讨论三角函数的综合应用，重点梳理三角形中的正切恒等式、有理性证明、最值分析、半角关系及三角函数方程等解题方法。

2026年7月29日 · 强基计划 · 数学竞赛

例4.16

(北京大学) 在 $\triangle ABC$ 中, $\tan A + \tan B + \tan C > 0$ 是 $\triangle ABC$ 为锐角三角形的

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

必要性是显然的,下面从熟知的正切恒等式开始研究充分性:

$$\tan A \tan B \tan C = \tan A + \tan B + \tan C > 0$$

锐角三角形的反面是:有一个角不小于 90° ,其他两个角都小于 90° ,这将导致 $\tan A \tan B \tan C < 0$ 或不存在.

反面不可能成立,所以充分性也成立.

例4.17

(复旦大学) 在 $\triangle ABC$ 中, $\tan A : \tan B : \tan C = 1 : 2 : 3$, 求 $\frac{AC}{AB}$.

$$\begin{cases} \tan A = k, \\ \tan B = 2k, \\ \tan C = 3k \end{cases}$$

$$\tan A \tan B \tan C = \tan A + \tan B + \tan C$$

$$\implies k(2k)(3k) = k + 2k + 3k$$

$$6k^3 = 6k(k > 0), k^2 = 1, k = +1$$

$$\sin B = \frac{\tan B}{\sqrt{1 + \tan^2 B}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\begin{aligned} \sin C &= \frac{\tan C}{\sqrt{1 + \tan^2 C}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \frac{AC}{AB} \\ &= \frac{\sin B}{\sin C} \\ \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{3}{\sqrt{10}}} &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

例4.18

(北京大学) 是否存在实数 x , 使 $\tan x + \sqrt{3}$ 与 $\cot x + \sqrt{3}$ 为有理数?

条件过少, 使用反证法, 以子之矛, 攻子之盾.

$$\tan x + \sqrt{3} = p \in Q, \cot x + \sqrt{3} = q \in Q$$

$$\tan x \neq 0, p \neq \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{p - \sqrt{3}} + \sqrt{3} = q$$

$$\frac{p + \sqrt{3}}{p^2 - 3} + \sqrt{3} = q$$

$$\sqrt{3} \left(\frac{1}{p^2 - 3} + 1 \right) + \left(\frac{p}{p^2 - 3} - q \right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{p^2 - 3} + 1 = 0, \\ \frac{p}{p^2 - 3} - q = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{p^2 - 3} + 1 = 0 \iff p = \pm\sqrt{2}$$

而 $\sqrt{2} \notin Q$, 推出矛盾!

例4.19

(清华大学) 设 α, β, γ 分别为 $1^\circ, 61^\circ, 121^\circ$, 则

A. $\frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma}{\tan \alpha \tan \beta \tan \gamma} = -3$

B. $\frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma}{\tan \alpha \tan \beta \tan \gamma} = 3$

C. $\tan \alpha \tan \beta + \tan \beta \tan \gamma + \tan \gamma \tan \alpha = -3$

D. $\tan \alpha \tan \beta + \tan \beta \tan \gamma + \tan \gamma \tan \alpha = 3$

发掘 60° 的角度差:

$$\begin{aligned}\tan(\gamma - \beta) &= \frac{\tan \gamma - \tan \beta}{1 + \tan \gamma \tan \beta} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \\ \tan(\beta - \alpha) &= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \\ \tan(\alpha - \gamma) &= \frac{\tan \alpha - \tan \gamma}{1 + \tan \alpha \tan \gamma} = \tan(-120^\circ) = \sqrt{3}\end{aligned}$$

试图使用合比定理,会产生 $\frac{0}{0}$ 型未定式:

$$\begin{aligned}(\tan \gamma - \tan \beta) + (\tan \beta - \tan \alpha) + (\tan \alpha - \tan \gamma) &= \sqrt{3}(3 + \tan \alpha \tan \beta + \tan \beta \tan \gamma + \tan \gamma \tan \alpha) \\ 0 &= \tan \alpha \tan \beta + \tan \beta \tan \gamma + \tan \gamma \tan \alpha + 3 \\ \tan \alpha \tan \beta + \tan \beta \tan \gamma + \tan \gamma \tan \alpha &= -3\end{aligned}$$

C,D选项是成组的,现在判断A,B:

$$\begin{aligned}\tan \alpha - \tan \gamma &= \sqrt{3}(1 + \tan \alpha \tan \gamma) \\ \frac{1}{\tan \gamma} - \frac{1}{\tan \alpha} &= \sqrt{3}\left(\frac{1}{\tan \alpha \tan \gamma} + 1\right) \\ \frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{\tan \beta} &= \sqrt{3}\left(\frac{1}{\tan \beta \tan \alpha} + 1\right) \\ \frac{1}{\tan \beta} - \frac{1}{\tan \gamma} &= \sqrt{3}\left(\frac{1}{\tan \gamma \tan \beta} + 1\right) \\ &\quad \frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma}{\tan \alpha \tan \beta \tan \gamma} \\ &= \frac{1}{\tan \alpha \tan \gamma} + \frac{1}{\tan \beta \tan \alpha} + \frac{1}{\tan \gamma \tan \beta} = -3\end{aligned}$$

或者,考虑别的方向:正切三倍角公式

$$\begin{aligned}
 & \tan 3\alpha \\
 &= \tan(2\alpha + \alpha) \\
 &= \frac{\tan 2\alpha + \tan \alpha}{1 - \tan 2\alpha \tan \alpha} \\
 &= \frac{\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} + \tan \alpha}{1 - \frac{2 \tan^2 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}} \\
 &= \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}
 \end{aligned}$$

注意到 $T = 180^\circ = 60^\circ \times 3$, 有:

$$\tan 3^\circ = \tan 183^\circ = \tan 363^\circ$$

$$\frac{3 \tan 1^\circ - \tan^3 1^\circ}{1 - 3 \tan^2 1^\circ} = \frac{3 \tan 61^\circ - \tan^3 61^\circ}{1 - 3 \tan^2 61^\circ} = \frac{3 \tan 121^\circ - \tan^3 121^\circ}{1 - 3 \tan^2 121^\circ} = \tan 3^\circ$$

由于三个角度的正切值显然各不相同, 故它们是方程:

$$\frac{t^3 - 3t}{3t^2 - 1} = \tan 3^\circ$$

的三个不同实根.

$$t^3 - (3 \tan 3^\circ)t^2 - 3 + \tan 3^\circ = 0$$

于是根据一元三次方程韦达定理:

$$\begin{cases} \tan \alpha \tan \beta + \tan \beta \tan \gamma + \tan \gamma \tan \alpha = -3, \\ \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = 3 \tan 3^\circ, \\ \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma = -\tan 3^\circ \end{cases}$$

同样选出AC, 这个方法涉及到三个角度的产生, 可能更本质.

例4.20

(北京大学) 求证: $\tan 3^\circ \notin \mathbb{Q}$.

假设 $\tan 3^\circ \in \mathbb{Q}$, 则由正切两角和公式: $\tan 6^\circ \in \mathbb{Q}, \tan 9^\circ \in \mathbb{Q}, \tan 12^\circ \in \mathbb{Q}, \dots, \tan 30^\circ \in \mathbb{Q}$, 这导致矛盾.

例4.21

(清华大学) 在 $\triangle ABC$ 中, 则 $\sin A + \sin B \sin C$ 的最大值

- A. 最大值为 $\frac{3}{2}$
 B. 最大值为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
 C. 最大值为 $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$
 D. 无最大值

固定A, 考虑B, C:

$$\begin{aligned} & \sin A + \sin B \sin C \\ &= \sin A - \frac{1}{2} [\cos(B+C) - \cos(B-C)] \\ &= \sin A - \frac{1}{2} \cos(\pi - A) + \frac{1}{2} \cos(B-C) \\ &= \sin A + \frac{1}{2} \cos A + \frac{1}{2} \cos(B-C) \\ &\leq \sin A + \frac{1}{2} \cos A + \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{aligned}$$

例4.22

(中国科学技术大学) 已知三角形 ABC 中, $\sin A + 2 \sin B \cos C = 0$, 则 $\tan A$ 的最大值是_____。

$$\begin{aligned} a + 2b \cos C &= 0 \\ a + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a} &= 0 \\ 2a^2 + b^2 - c^2 &= 0 \end{aligned}$$

条件都是三角形的边, 求 $\cos A$ 更方便:

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{b^2 + c^2 - \frac{c^2 - b^2}{2}}{2bc} \\ &= \frac{\frac{3}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2}{2bc} \geq \frac{2\sqrt{3}bc}{4bc} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan A &\leq \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

或者考虑 $A = \pi - (B + C)$:

$$3 \sin B \cos C + \sin C \cos B = 0$$

$$3 \tan B + \tan C = 0$$

$$-\tan A = \tan(B + C) = \frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C}$$

$$= \frac{-2 \tan B}{1 + 3 \tan^2 B}$$

$$\therefore \tan A = \frac{2}{3 \tan B + \frac{1}{\tan B}} \leq \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

例4.23

(清华大学) 在三角形 ABC 中, 三边长 a, b, c 满足 $a + c = 3b$, 则 $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2}$ 的值为

- A. $\frac{1}{5}$
- B. $\frac{1}{4}$
- C. $\frac{1}{2}$
- D. $\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \sin A + \sin C &= 3 \sin B \\ 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} &= 3 \sin(A+C) = 6 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A+C}{2} \\ \therefore \frac{A+C}{2} &\in (0, \frac{\pi}{2}) \therefore \sin \frac{A+C}{2} > 0 \\ \cos \frac{A-C}{2} &= 3 \cos \frac{A+C}{2} \\ \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} &= 3(\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}) \\ 1 + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} &= 3(1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2}) \\ \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

考虑 $\tan \frac{A}{2}$ 的几何意义, 更为直观:

$$\begin{aligned}\tan \frac{A}{2} &= \frac{r}{\frac{b+c-a}{2}} \\ \tan \frac{C}{2} &= \frac{r}{\frac{a+b-c}{2}} \\ \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} &= \frac{4r^2}{(b+c-a)(a+b-c)}\end{aligned}$$

回忆一下海伦公式:

$$\begin{aligned}S_{\triangle} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp, p = \frac{a+b+c}{2} \\ r^2 p &= (p-a)(p-b)(p-c) \\ \frac{r^2}{(p-a)(p-c)} &= \frac{p-b}{p} = \frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{1}{2} \\ \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

例4.24

(上海交通大学) 三角形的三边长为连续整数。

1. 是否存在这样的三角形, 其最大角是最小角的 2 倍?
2. 是否存在这样的三角形, 其最大角是最小角的 3 倍?

考虑对称性, 设三边长为 $a = x - 1, b = x, c = x + 1, x \in \mathbb{N}^*, x \geq 3$, 则最小角为 A, 最大角为 C:

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{x^2 + (x+1)^2 - (x-1)^2}{2x(x+1)} \\ &= \frac{x^2 + 4x}{2x(x+1)} \\ &= \frac{x+4}{2(x+1)} \\ \cos C &= \frac{x^2 + (x-1)^2 - (x+1)^2}{2x(x-1)} \\ &= \frac{x^2 - 4x}{2x(x-1)} \\ &= \frac{x-4}{2(x-1)}\end{aligned}$$

考虑1:

$$\begin{aligned}
 C &= 2A \\
 \cos C &= 2\cos^2 A - 1 \\
 \frac{x-4}{2(x-1)} &= 2\left[\frac{x+4}{2(x+1)}\right]^2 - 1 \\
 (x-4)(x+1)^2 &= (x+4)^2(x-1) - 2(x+1)^2(x-1) \\
 2x^3 - 7x^2 - 17x + 10 &= 0 \\
 (x-5)(2x^2 + 3x - 2) &= 0 \\
 x &= 5
 \end{aligned}$$

考虑2:

盲目求解高次方程不可取,我们分析A,C变化趋势:

- x 越大, $\cos A$ 越小, A 越大
- x 越大, $\cos C$ 越大, C 越小
- $x=5, C=2A$

所以想要 $C = 3A$, 只能是 $x = 4, 3$, 而经检验均不符合条件, 故2不存在.

例4.25

(清华大学) 已知 $\triangle ABC$ 不是直角三角形, $\sqrt{3}\tan C - 1 = \frac{\tan B + \tan C}{\tan A}$, 且 $\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C$ 的倒数成等差数列, 则 $\cos \frac{A-C}{2}$ 的可能值为

- A. 1
- B. -1
- C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$
- D. $-\frac{\sqrt{6}}{4}$

先考虑正切条件去分母:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{3}\tan A \tan C &= \tan A + \tan B + \tan C \\
 \tan A \tan B \tan C &= \tan A + \tan B + \tan C
 \end{aligned}$$

这表明 $\tan B = \sqrt{3}, B = \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin 2A} + \frac{1}{\sin 2C} &= \frac{2}{\sin 2B} = \frac{4}{\sqrt{3}} \\
\frac{\sin 2A + \sin 2C}{\sin 2A \sin 2C} &= \frac{4}{\sqrt{3}} \\
\frac{4 \sin(A+C) \cos(A-C)}{\cos(2A-2C) - \cos(2A+2C)} &= \frac{4}{\sqrt{3}} \\
\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(A-C)}{\cos(2A-2C) + \frac{1}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\
3 \cos(A-C) &= 2 \cos[2(A-C)] + 1 \\
3 \cos(A-C) &= 2[2 \cos^2(A-C) - 1] + 1 \\
4 \cos^2(A-C) - 3 \cos(A-C) - 1 &= 0 \\
\cos(A-C) &= 1 \text{ or } -\frac{1}{4} \\
\cos\left(\frac{A-C}{2}\right) &= 1 \text{ or } +\frac{\sqrt{6}}{4} \text{ or } -\frac{\sqrt{6}}{4} (\text{discard})
\end{aligned}$$

例4.26

(北京大学) 有多少种互不相似的三角形 ABC 满足 $\sin A = \cos B = \tan C$

- A. 0
B. 1
 C. 2 D. 前三个答案都不对

先考虑 $\sin A = \cos B$, 这可以直接得出角度关系:

$$\begin{aligned}
\sin A &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + B\right) \\
A &= \frac{\pi}{2} + B \text{ or } \frac{\pi}{2} - B
\end{aligned}$$

下面根据这两种可能进行讨论:

$$A = \frac{\pi}{2} - B, C = \frac{\pi}{2}$$

这将导致 $\tan C$ 无意义, 舍去这种情况.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\pi}{2} + B \\
 \tan C &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2B\right) = \frac{1}{\tan 2B} = \cos B \\
 \frac{\cos 2B}{\sin 2B} &= \cos B \\
 \cos 2B &= \sin 2B \cos B \\
 2 \cos^2 B - 1 &= 2 \sin B \cos^2 B \\
 (2 \cos^2 B - 1)^2 &= 4(1 - \cos^2 B) \cos^4 B \\
 4(\cos^2 B)^3 - 4 \cos^2 B + 1 &= 0, B \in (0, \frac{\pi}{2})
 \end{aligned}$$

令 $\cos^2 B = t \in (0, 1)$, 则:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= 4t^3 - 4t + 1 \\
 f'(t) &= 12t^2 - 4 \\
 f(0) &= 1, f(1) = 1, f\left(+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{9 - 8\sqrt{3}}{9} < 0
 \end{aligned}$$

所以 $f(t) = 0$ 有两个实数解, 对应确定的两个 B , 还需要检验这两个 B 的可行性:

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{\pi}{2} - 2B > 0, B < \frac{\pi}{4} \\
 t &= \cos^2 B > \frac{1}{2} \\
 \frac{1}{2} &< \frac{1}{\sqrt{3}} \\
 f\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{2} < 0 \\
 t_1 &\in (0, \frac{1}{2}), t_2 \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)
 \end{aligned}$$

这表明, 只有 t_2 对应的 B 是可行的, 对应唯一确定的三角形形状.

例4.27

(同济大学) 设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, 其中 $\omega > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. 若存在常数 T ($T < 0$), 使对任意 $x \in \mathbb{R}$ 有 $f(x + T) = Tf(x)$, 则 ω 可取得的最小值为_____。

考虑正弦函数的有界性, 只能有 $|T| = 1$, 又 $T < 0$, 故 $T = -1$.

$$f(x - 1) = -f(x)$$

这表明 $\omega = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 故 $\omega \geq \pi$

例4.28

(北京大学) 求使得 $\sin 4x \sin 2x - \sin x \sin 3x = a$ 在 $[0, \pi)$ 有唯一解的 a 。

$$\begin{aligned}\cos 2x - \cos 6x - (\cos 2x - \cos 4x) &= 2a \\ \cos 4x - \cos 6x &= 2a \\ \sin 5x \sin x &= a\end{aligned}$$

$f(x) = \sin 5x \sin x = a$ 在 $[0, \pi)$ 有唯一解, 要么是在边界上取到, 要么是在极值点处取到。

进一步审视函数性质, 发现 $x = \frac{\pi}{2}$ 是函数 $f(x)$ 对称轴, 所以:

$$f(0) = 0 = a \text{ or } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = a$$

$a = 0$ 显然对应很多 x , 故只能是 $a = 1$ 。

$$\begin{aligned}\sin 5x \sin x &= a \\ 5x - x &= 2k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k'\pi \in [0, \pi) \\ k &= 2k' + 1 (k' = 0) \\ x &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

例4.29

(同济大学) 设 $0 < a < 1$, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, $x = (\sin \theta)^{\log_a \sin \theta}$, $y = (\cos \theta)^{\log_a \tan \theta}$, 则 x, y 的大小关系为 _____。

$$\begin{aligned}0 < \theta &< \frac{\pi}{4} \\ \implies 1 &> \cos \theta > \sin \theta \\ \sin \theta &< \tan \theta < 1, a < 1 \\ \implies \log_a \sin \theta &> \log_a \tan \theta > 0 \\ x &< (\cos \theta)^{\log_a \sin \theta} < y\end{aligned}$$