[2027强基计划]三角函数(I)

通过十五道典型例题梳理三角函数的恒等变形与综合应用，重点讲解和差化积、辅助角、万能公式、切化弦及对偶构造等解题方法。

2026年7月27日 · 强基计划 · 数学竞赛

例4.1

（清华大学）设 $\alpha=\frac{\pi}{24}$，则 $\frac{\sin\alpha}{\cos 4\alpha\cos 3\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos 3\alpha\cos 2\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

考虑积化和差化简分母:

$$\begin{gathered}\frac{\sin\alpha}{\cos 4\alpha\cos 3\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos 3\alpha\cos 2\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\=\frac{2\sin\alpha}{\cos 7\alpha+\cos\alpha}+\cdots\end{gathered}$$

分母更加复杂了,此路不通,考虑让分子向分母的形式凑:

$$\begin{gathered}\frac{\sin\alpha}{\cos 4\alpha\cos 3\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos 3\alpha\cos 2\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\=\frac{\sin(4\alpha-3\alpha)}{\cos 4\alpha\cos 3\alpha}+\frac{\sin(3\alpha-2\alpha)}{\cos 3\alpha\cos 2\alpha}+\frac{\sin(2\alpha-\alpha)}{\cos 2\alpha\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\=\tan 4\alpha-\tan 3\alpha+\tan 3\alpha-\tan 2\alpha+\tan 2\alpha-\tan\alpha+\tan\alpha\\=\tan 4\alpha=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{gathered}$$

例4.2

（同济大学）已知 $\sin 2(\alpha+\gamma)=n\sin 2\beta$，则 $\frac{\tan(\alpha+\beta+\gamma)}{\tan(\alpha-\beta+\gamma)}=$

A. $\frac{n-1}{n+1}$

B. $\frac{n}{n+1}$

C. $\frac{n}{n-1}$

D. $\frac{n+1}{n-1}$

$$\begin{gathered}\frac{\tan(\alpha+\beta+\gamma)}{\tan(\alpha-\beta+\gamma)}\\=\frac{\tan[(\alpha+\gamma)-\beta]}{\tan[(\alpha+\gamma)+\beta]}\\=\frac{\frac{\tan(\alpha+\gamma)-\tan\beta}{1+\tan(\alpha+\gamma)\tan\beta}}{\frac{\tan(\alpha+\gamma)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha+\gamma)\tan\beta}}\end{gathered}$$

一筹莫展.我们看条件如何用**万能公式**化简:

$$\frac{2\tan(\alpha+\gamma)}{1+\tan^2(\alpha+\gamma)}=n\frac{2\tan(\beta)}{1+\tan^2(\beta)}$$

条件和结论都没有得到有效的化简.前方的路不好走,考虑从结果入手:

$$\begin{gathered}A=\alpha+\beta+\gamma,B=\alpha-\beta+\gamma\\\sin(A+B)=n\sin(A-B)\\\sin A\cos B+\cos A\sin B=n(\sin A\cos B-\cos A\sin B)\\(n+1)\sin B\cos A=(n-1)\sin A\cos B\\(n+1)\tan B=(n-1)\tan A\\\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{n+1}{n-1}\end{gathered}$$

例4.3

（2025 北京大学）若 α,β 是 $3\cos x+2\sin x=c$ 的两解，且 $\alpha-\beta\neq k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$，求 $\tan(\alpha+\beta)$。

引入辅助角φ:

$$\begin{gathered}\sqrt{13}(\sin\varphi\cos x+\cos\varphi\sin x)=c\\\sin(\varphi+x)=\frac{c}{\sqrt{13}}\\\begin{cases}\sin\varphi=\frac{3}{\sqrt{13}},\\\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{13}}\end{cases}\\\varphi+x=(-1)^n\arcsin(\frac{c}{\sqrt{13}})+n\pi(n\in\mathbb{Z})\end{gathered}$$

由于$\alpha-\beta\neq k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$,所以$\alpha,\beta$对应的n奇偶性不同,不妨设:

$$\begin{gathered}\varphi+\alpha=\arcsin(\frac{c}{\sqrt{13}})\\ \varphi+\beta=\pi-\arcsin(\frac{c}{\sqrt{13}})\\ \tan(\alpha+\beta)=\tan(\pi-2\varphi)\\ =-\tan 2\varphi=-\frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}\\ =\frac{2\times\frac{3}{2}}{(\frac{3}{2})^2-1}\\ =\frac{12}{5}\end{gathered}$$

例4.4

2026 北京大学）在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\frac{\sin A+\sqrt{3}\cos A}{\cos A-\sqrt{3}\sin A}=\tan\frac{7\pi}{12}$，则 $\sin 2B+2\cos C$ 的取值范围为

__________。

考虑对条件齐次化:

$$\frac{\tan A+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan A\tan\frac{\pi}{3}}=\tan\frac{7\pi}{12}$$
$$\tan(A+\frac{\pi}{3})=\tan\frac{7\pi}{12}$$
$$A+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$$
$$A\in(0,\pi)$$
$$A=\frac{\pi}{4}$$
$$B+C=\pi-A=\frac{3\pi}{4}$$
$$\sin[2(\frac{3\pi}{4}-C)]+2\cos C$$
$$=\sin(\frac{3\pi}{2}-2C)+2\cos C$$
$$=-\sin(\frac{\pi}{2}-2C)+2\cos C$$
$$=2\cos C-\cos 2C$$
$$=2\cos C-(2\cos^2 C-1)$$
$$=-2\cos^2 C+2\cos C+1=-2(\cos C-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}$$
$$C\in(0,\frac{3\pi}{4})$$
$$\cos C\in(-\frac{\sqrt{2}}{2},1)$$
$$-2(\cos C-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}\in(-\sqrt{2},\frac{3}{2}]$$

例4.5

（清华大学）已知 x,y 满足 $\sin x+\sin y=\frac{1}{3}$，$\cos x-\cos y=\frac{1}{5}$，则 $\cos(x+y)+\sin(x-y)$ 的值为

A. $\frac{32}{765}$
B. $\frac{161}{3825}$ C. $\frac{18}{425}$
D. $\frac{163}{3825}$

使用和差化积:

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{3},(1)$$
$$-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}=\frac{1}{5}(2)$$
$$(2)\div(1):\tan\frac{x-y}{2}=-\frac{3}{5}$$

使用万能公式计算$\sin(x-y)$:

$$\sin(x-y)=\frac{2\tan\frac{x-y}{2}}{1+\tan^2\frac{x-y}{2}}=-\frac{15}{17}$$

然后,考虑条件平方相加:

$$\begin{gathered}2-2\cos(x+y)=\frac{34}{225}\\ \cos(x+y)=\frac{208}{225}\end{gathered}$$

最后的计算结果:$\frac{208}{225}-\frac{15}{17}=\frac{161}{3825}$

例4.6

（复旦大学）已知 $\sin\alpha+\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha+\sin\beta=\sqrt{2}$，求 $\tan\alpha\cdot\cot\beta$ 的值。

审视一下所求式:

$$\tan\alpha\cdot\cot\beta=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}$$

条件平方相加可以凑出分子加分母.

$$\begin{gathered}2+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=2+\frac{3}{4}\\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{8}\end{gathered}$$

如果可以凑出分子减分母,问题便迎刃而解.

我们通过条件平方相减实现:

$$\begin{gathered}2(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)+\sin^2\alpha+\cos^2\beta-\cos^2\alpha-\sin^2\beta=-\frac{5}{4}\\ 2(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)-\cos2\alpha+\cos2\beta=-\frac{5}{4}\\ 2(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)-2\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)=-\frac{5}{4}\\ (\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)-\frac{3}{8}\sin(\beta-\alpha)=-\frac{5}{8}\\ (\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)+\frac{3}{8}(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=-\frac{5}{8}\\ \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=-\frac{5}{11}\end{gathered}$$

联立和与差,得:

$$
\begin{gathered}
\sin\alpha\cos\beta=-\frac{7}{176}\\
\cos\alpha\sin\beta=\frac{73}{176}\\
\tan\alpha\cdot\cot\beta=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}=-\frac{7}{73}
\end{gathered}
$$

例4.7

（复旦大学）解方程：$\cos 3x\cdot\underline{\tan 5x}=\sin 7x$。

$\tan 5x$是不和谐之处,应该同乘$\cos 5x$实现切化弦,同时考虑增根问题:

$$
\begin{gathered}
\cos 3x\sin 5x=\sin 7x\cos 5x\\
\sin 8x+\sin 2x=\sin 12x+\sin 2x\\
\sin 8x=\sin 12x\\
12x=8x+2k\pi(k\in\mathbb{Z})\text{ or }12x=(\pi-8x)+2k\pi(k\in\mathbb{Z})\\
x=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})\text{ or }x=\frac{(2k+1)\pi}{20}(k\in\mathbb{Z})
\end{gathered}
$$

舍去定义域外的根:

$$
\begin{gathered}
5x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbb{Z})\\
x\neq\frac{(2k+1)\pi}{10}
\end{gathered}
$$

对于$x=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$,$k$不能取奇数,故化为$x=k\pi(k\in\mathbb{Z})$

对于$x=\frac{(2k+1)\pi}{20}(k\in\mathbb{Z})$,$k\in\mathbb{Z}$均符合条件.

$$
\boxed{\{x|x=k\pi\text{ 或 }x=\frac{(2k+1)\pi}{20},k\in\mathbb{Z}\}}
$$

例4.8

（北京大学）已知 $\sin x,\sin y,\sin z$ 是**递增**的**等差数列**，求证：$\cos x,\cos y,\cos z$ 不是等差数列。

采取反证法:假设$\cos x,\cos y,\cos z$ 是等差数列.

$$
\begin{gathered}
\sin x+\sin z=2\sin y(1)\\
\cos x+\cos z=2\cos y(2)\\
(1)^2+(2)^2:2+2\cos(x-z)=4\\
\cos(x-z)=+1
\end{gathered}
$$

$\cos(x-z)=1\iff z-x=2k\pi(k\in\mathbb{Z})$,故$\sin x=\sin z$,这与递增的条件矛盾.

例4.9

(2024 清华大学) 已知 $\{\sin\theta,\sin 2\theta,\sin 3\theta\}=\{\cos\theta,\cos 2\theta,\cos 3\theta\}$，则 θ 的可能值是______。

元素配对种类繁多,考虑整体条件或为简便:

$$
\begin{gathered}
\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta=\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta\\
2\sin 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta=2\cos 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\\
\sin 2\theta(2\cos\theta+1)=\cos 2\theta(2\cos\theta+1)
\end{gathered}
$$

考虑两条岔路,先难后易:

$$
\begin{gathered}
2\cos\theta+1=0\\
\cos\theta=-\frac{1}{2}\\
\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=-\frac{1}{2}=\cos\theta
\end{gathered}
$$

这与集合的互异性矛盾.

$$
\begin{gathered}
\sin 2\theta=\cos 2\theta\\
\sin(2\theta-\frac{\pi}{4})=0\\
2\theta-\frac{\pi}{4}=k\pi(k\in\mathbb{Z})\\
\theta=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})
\end{gathered}
$$

接下来,应该检验$\theta=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$:

$$
\begin{gathered}
\{\sin\theta,\sin 3\theta\}=\{\cos\theta,\cos 3\theta\}\\
\sin\theta\sin 3\theta=\cos\theta\cos 3\theta\\
-(\cos 4\theta-\cos\theta)=\cos 4\theta+\cos\theta\\
\cos 4\theta=0
\end{gathered}
$$

$\theta=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$满足$\cos 4\theta=0$,进一步考虑元素的互异性:

$$
\begin{gathered}
\sin\theta\neq\sin 3\theta\\
3\theta\neq\theta+2k\pi \text{ and } 3\theta\neq(\pi-\theta)+2k\pi(k\in\mathbb{Z})\\
\theta\neq k\pi \text{ and } \theta\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}
\end{gathered}
$$

那么,所有的$\theta=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$都能使得$\{\sin\theta,\sin 3\theta\}=\{\cos\theta,\cos 3\theta\}$(因为元素的和/积对应相等,且满足元素的互异性).

更进一步,检验整体集合的元素互异性:

$$
\begin{gathered}
\sin\theta\neq\sin 2\theta\\
2\theta\neq\theta+2k\pi \text{ and } 2\theta\neq(\pi-\theta)+2k\pi(k\in\mathbb{Z})\\
\theta\neq 2k\pi \text{ and } \theta\neq\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}(k\in\mathbb{Z})\\
\sin 2\theta\neq\sin 3\theta\\
3\theta\neq 2\theta+2k\pi \text{ and } 3\theta\neq(\pi-2\theta)+2k\pi(k\in\mathbb{Z})\\
\theta\neq 2k\pi \text{ and } \theta\neq\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}(k\in\mathbb{Z})
\end{gathered}
$$

显然$\theta=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$可以胜任这些要求,故为最终结果.

例4.10

求 $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}$ 的值。

$$
\begin{gathered}
\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot(-\cos\frac{4\pi}{7})\\
=-\frac{\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}}{2}\\
=-\frac{\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{4}\\
=-\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8}\\
=\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{8}
\end{gathered}
$$

得到$\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}$

或者,构造对偶式:

$$\begin{gathered}A=\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7},B=\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}\\AB=\frac{1}{8}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7}\\=\frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}B\\\Longrightarrow A=\frac{1}{8}\end{gathered}$$

例4.11

求 $\cos\frac{\pi}{11}\cdot\cos\frac{2\pi}{11}\cdots\cos\frac{10\pi}{11}$ 的值。

不难发现,乘数中出现了周期性:

$$\begin{gathered}A=\cos\frac{\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{4\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}\\\cos\frac{\pi}{11}\cdot\cos\frac{2\pi}{11}\cdots\cos\frac{10\pi}{11}=-A^2\end{gathered}$$

照猫画虎,引入对偶式:

$$\begin{gathered}B=\sin\frac{\pi}{11}\sin\frac{2\pi}{11}\sin\frac{3\pi}{11}\sin\frac{4\pi}{11}\sin\frac{5\pi}{11}\\AB=\frac{1}{2^5}\sin\frac{2\pi}{11}\sin\frac{4\pi}{11}\sin\frac{6\pi}{11}\sin\frac{8\pi}{11}\sin\frac{10\pi}{11}\\=\frac{1}{2^5}\sin\frac{2\pi}{11}\sin\frac{4\pi}{11}\sin\frac{5\pi}{11}\sin\frac{3\pi}{11}\sin\frac{1\pi}{11}=\frac{1}{2^5}B\\\Longrightarrow A=\frac{1}{2^5}\\\cos\frac{\pi}{11}\cdot\cos\frac{2\pi}{11}\cdots\cos\frac{10\pi}{11}=-A^2=-\frac{1}{2^{10}}=-\frac{1}{1024}\end{gathered}$$

例4.12

求 $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$ 的值。继续构造对偶式:

$$\begin{gathered}
A=\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\\
B=\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}\\
A^2+B^2=3-2\cos\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{2\pi}{7}\\
=3-4\cos\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{2\pi}{7}\\
A^2-B^2=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}-2\cos\frac{3\pi}{7}-2\cos\frac{5\pi}{7}+2\cos\frac{4\pi}{7}\\
=\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}-4\cos\frac{3\pi}{7}+2\cos\frac{2\pi}{7}\\
=-\cos\frac{\pi}{7}+3\cos\frac{2\pi}{7}-5\cos\frac{3\pi}{7}\\
(A^2+B^2)+(A^2-B^2)=3-5A=2A^2\\
2A^2+5A-3=0\\
\Longrightarrow A=-3(\text{discard}),\frac{1}{2}
\end{gathered}$$

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$$

或者,考虑用诱导公式去掉讨厌的负号:

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}$$

我们发现,这正是之前讨论过的经典问题,剩余两种处理思路(单位根/构造裂项)不加赘述.

例4.13

(北京大学) $\left(1+\cos\frac{\pi}{5}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{5}\right)$ 的值为

A. $1+\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{5}{4}$

C. $1+\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. 前三个答案都不对

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\cos\frac{\pi}{5}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{5}\right)\\
&=1+\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}\\
&=1+\frac{1}{2}(\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5})+\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}\\
&=1+\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5})\\
&=1+\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\\
&=1+\frac{\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}\\
&=1+\frac{\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}\\
&=1+\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

对于$\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$,仍可以构造对偶式:

$$
\begin{aligned}
A&=\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5},\\
B&=\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}\\
AB&=\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}B\\
&\implies A=\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

此外,利用$\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$(黄金分割率的一半)也可行

例4.14

(2024 北京大学) 求 $\sin^3 6^\circ-\sin^3 114^\circ+\sin^3 126^\circ$。

注意到$114^\circ=120^\circ-6^\circ,126^\circ=120^\circ+6^\circ.$

逆用正弦三倍角公式降幂升角:$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x\iff\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}$

$$\begin{aligned}
&\sin^3 6^\circ - \sin^3 114^\circ + \sin^3 126^\circ \\
=& \frac{3\sin 6^\circ - \sin 18^\circ}{4} - \frac{3\sin 114^\circ - \sin 342^\circ}{4} + \frac{3\sin 126^\circ - \sin 378^\circ}{4} \\
=& \frac{3\sin 6^\circ - \sin 18^\circ}{4} - \frac{3\sin 114^\circ + \sin 18^\circ}{4} + \frac{3\sin 126^\circ - \sin 18^\circ}{4} \\
=& \frac{3}{4}(\sin 6^\circ - \sin 18^\circ - \sin 114^\circ + \sin 126^\circ) \\
=& \frac{3}{4}(2\sin 66^\circ \cos 60^\circ - \sin 114^\circ - \sin 18^\circ) \\
=& -\frac{3}{4}\sin 18^\circ \\
=& -\frac{3}{4}\frac{\sqrt{5}-1}{4} = -\frac{3(\sqrt{5}-1)}{16}
\end{aligned}$$

例4.15

求值：$\sin^2 10^\circ + \cos^2 40^\circ + \sin 10^\circ \cdot \cos 40^\circ$

经典题目:背景为余弦定理.

$$\begin{aligned}
&\sin^2 10^\circ + \cos^2 40^\circ + \sin 10^\circ \cdot \cos 40^\circ \\
=& \sin^2 10^\circ + \sin^2 50^\circ - 2\cos 120^\circ \sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \\
=& \sin^2 120^\circ = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

思路打开:沿用对偶式

$$\begin{gathered}
A = \sin^2 10^\circ + \cos^2 40^\circ + \sin 10^\circ \cdot \cos 40^\circ \\
B = \cos^2 10^\circ + \sin^2 40^\circ + \cos 10^\circ \cdot \sin 40^\circ \\
A + B = 2 + \sin 50^\circ \\
A - B = \cos 80^\circ - \sin 20^\circ - \sin 30^\circ \\
2A = \frac{3}{2} + \sin 50^\circ + \sin 10^\circ - \sin 20^\circ \\
= \frac{3}{2} + 2\sin 30^\circ \sin 20^\circ - \sin 20^\circ = \frac{3}{2} \\
\Longrightarrow A = \frac{3}{4}
\end{gathered}$$