

[2027强基计划]函数迭代

整理《2027强基计划》3.3 函数迭代中的十道例题，涵盖抽象函数关系式、不动点与稳定点以及高次迭代与周期。

2026年8月1日 · 强基计划 · 数学竞赛

抽象函数关系式

例题 3.30

(复旦改编) 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ ($x \neq 1$) 满足

$$f(x) + 2f\left(\frac{x+2024}{x-1}\right) = 4059 - x,$$

则 $f(2026) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

常见做法:不断地进行赋值迭代,直到出现回环重复

$$\begin{cases} f(2026) + 2f(2) = 2033, \\ f(2) + 2f(2026) = 4057 \end{cases}$$

解得: $f(2026) = 2027$

命题背景:自反函数

自反函数 (Self-reciprocal function / Involution) 是指其反函数等于自身的函数。换句话说,如果对该函数进行两次复合,结果会回到自变量本身,即满足 $f(f(x)) = x$ 。在几何图像上,自反函数的图像关于直线 $y = x$ 严格对称。

对于分式函数 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$,其为自反函数的充要条件为

$$a = -d$$

证明:

$$\begin{aligned}
 y &= f(x), f(f(x)) = f(y) = x \\
 \begin{cases} y &\equiv \frac{ax+b}{cx+d}, \\ x &\equiv \frac{ay+b}{cy+d} \end{cases} \\
 \begin{cases} ax+b &\equiv cxy+dy \\ ay+b &\equiv cxy+dx \end{cases} \\
 \iff cxy-b &\equiv ax-dy \equiv ay-dx
 \end{aligned}$$

这意味着对应系数相同: $a = -d$

在例3.30里, $f(x) = \frac{x+2024}{x-1}$, $f(2) = 2026$, $f(2026) = 2$

例题 3.31

设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数。若 $f(0) = 0$, 且对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 满足

$$f(x+2) - f(x) \leq 3 \cdot 2^x$$

且

$$f(x+6) - f(x) \geq 63 \cdot 2^x,$$

则 $f(8) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

多写几项步长为2的式子,可以和步长为6的式子联立:

$$\begin{aligned}
 f(x+2) - f(x) &\leq 3 \cdot 2^x \\
 f(x+4) - f(x+2) &\leq 3 \cdot 2^{x+2} \\
 f(x+6) - f(x+4) &\leq 3 \cdot 2^{x+4} \\
 \implies f(x+6) - f(x) &\leq 3(2^x + 2^{x+2} + 2^{x+4}) = 63 \cdot 2^x
 \end{aligned}$$

而 $f(x+6) - f(x) \geq 63 \cdot 2^x$, 这意味着所有不等号必须取等:

$$\begin{aligned}
 f(x+2) - f(x) &= 3 \cdot 2^x \\
 f(x+8) - f(x) &= 3 \cdot (2^x + 2^{x+2} + 2^{x+4} + 2^{x+6}) = 255 \cdot 2^x \\
 f(8) &= f(0) + 255 \cdot 2^0 = 255
 \end{aligned}$$

例题 3.32

(多选) 已知 $y = f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 对于任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 有

$$f(x) \cdot f(y) = f(x + y - 1),$$

且当 $x > 1$ 时, $f(x) > 1$, 则 ()

A. $f(1) = 1$

B. $f(x)$ 的图象关于点 $(1, f(1))$ 中心对称

C. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不单调

D. 当 $x < 1$ 时, $0 < f(x) < 1$

取 $x = y = 1$, 得 $[f(1)]^2 = f(1)$, $f(1) = 0$ or 1 .

取 $y = 1$, 得 $f(x) \cdot f(1) = f(x)$, 若 $f(1) = 0$, $f(x) \equiv 0$, 与当 $x > 1$ 时, $f(x) > 1$ 条件矛盾, 故 $f(1) = 1$.

取 $x + y = 2$, 得 $f(x)f(y) = f(1) = 1$, 若 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, f(1))$ 中心对称, 则

$f(x) + f(y) = 2f(1) = 2 \implies f(x) \equiv f(y) \equiv 1$, 同样与当 $x > 1$ 时, $f(x) > 1$ 条件矛盾, 故选项B错误.

当 $x + y = 2$, $f(x)f(y) = f(1) = 1$ 时, 若 $x < 1$, $y > 1$, 则 $f(x) = \frac{1}{f(y)} \in (0, 1)$, 选项D正确

考虑到 $\begin{cases} f(x) \in (0, 1), x < 1 \\ f(x) \in [1, +\infty), x \geq 1 \end{cases}$, 故 $f(x)$ 恒为正数.

任取 $x_1 < x_2$, 要比较 $f(x_1)$, $f(x_2)$, 可以用除法(因为条件为乘法, 是除法的逆运算, 且 $f(x)$ 符号确定).

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2)}{f(x_1)} &= f(x_2 - x_1 + 1) > 1 (x_2 - x_1 + 1 > 1) \\ &\because f(x_1) > 0 \\ &\therefore f(x_2) > f(x_1) \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 选项C错误.

此外, 有一个不靠谱的解法: 令 $f(x) = a^{x-1}$, $a \in (1, +\infty)$, 这是一个符合条件的函数.

不动点与稳定点

例题 3.33

对于函数 $f(x)$, 若 $f(x) = x$, 则称 x 为 $f(x)$ 的“不动点”; 若 $f(f(x)) = x$, 则称 x 为 $f(x)$ 的“稳定点”。函数 $f(x)$ 的“不动点”和“稳定点”的集合分别记为 A 和 B , 即

$$A = \{x \mid f(x) = x\}, \quad B = \{x \mid f(f(x)) = x\}.$$

1. 求证: $A \subseteq B$;

2. 若 $f(x) = ax^2 - 1$ ($a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$), 且 $A = B \neq \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

(I) 任取 $a \in A$, 都有 $f(f(a)) = f(a) = a$, 即 $a \in B$, 所以 $A \subseteq B$

(II) 容易知道, $a = 0$ 符合题意, 下面考虑 $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} ax^2 - 1 &= x \\ ax^2 - x - 1 &= 0, \Delta_1 = 1 + 4a \geq 0 \\ a &\in \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right) \\ a(ax^2 - 1)^2 - 1 &= x \\ a^3x^4 - 2a^2x^2 - x + (a - 1) &= 0 \\ (ax^2 - x - 1)[a^2x^2 + ax - (a - 1)] &= 0 \end{aligned}$$

最后一步的因式分解并非空穴来风: 根据(I), 所有一阶不动点都是二阶不动点, 也就是方程 $ax^2 - x - 1 = 0$ 的根都是方程 $a^3x^4 - 2a^2x^2 - x + (a - 1) = 0$ 的根, 即 $a^3x^4 - 2a^2x^2 - x + (a - 1) = 0$ 包括因式 $ax^2 - x - 1 = 0$.

$A = B \neq \emptyset$, 要求 $a^2x^2 + ax - (a - 1) = 0$ 没有实根, 或者实根与 $ax^2 - x - 1 = 0$ 的实根完全重合.

对于没有实根的情况:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= a^2 + 4a^2(a - 1) < 0 \\ 4a^3 - 3a^2 &< 0 (a \neq 0) \\ 4a - 3 &< 0, a \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

对于实根重合的情况, 我们同样进行细分:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= 0, a = \frac{3}{4} \\ A &= \left\{+2, -\frac{2}{3}\right\}, B = \left\{+2, -\frac{2}{3}\right\} \end{aligned}$$

这符合题意.

$$\begin{aligned} \Delta_2 &> 0, a > \frac{3}{4} \\ \begin{cases} a^2 x^2 + ax - (a-1) = 0, \\ ax^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \\ \frac{a^2}{a} &= \frac{a}{-1} = \frac{1-a}{-1} \end{aligned}$$

从符号上看,两个方程显然不等价,无法做到解完全重合.

综上, $a \in [-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$

例题 3.34

(交大) 已知函数

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0),$$

且 $f(x) = x$ 没有实数根。那么 $f(f(x)) = x$ 是否有实数根? 并证明你的结论。

对二次项系数分类:

$$\begin{aligned} a > 0, f(x) > x, f(f(x)) > f(x) > x \\ a < 0, f(x) < x, f(f(x)) < f(x) < x \end{aligned}$$

容易知道 $f(f(x)) = x$ 没有实数根.

事实上,更一般的关系是:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - x \\ f(f(x)) &= x \\ \iff f(f(x)) - f(x) + f(x) - x &= 0 \\ \iff g(f(x)) + g(x) &= 0 \end{aligned}$$

在本题中, $g(x)$ 不变号.

例题 3.35

(2018 · 北大自主招生) 设实函数

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

定义

$$f_1(x) = f(x), \quad f_n(x) = f(f_{n-1}(x)) \quad (n \geq 2).$$

已知方程 $f_1(x) = x$ 无实根, 则方程 $f_{2018}(x) = x$ 的实根个数是 ()

- A. 0
- B. 2018
- C. 4036
- D. 前三个答案都不对

与例3.34如出一辙, 容易写出不等式链(或者裂项)说明无解.

$$\begin{aligned} & f_{2018}(x) - x \\ &= f_{2018}(x) - f_{2017}(x) + f_{2017}(x) - f_{2016}(x) + \cdots + f(x) - x \\ &= g(f_{2017}(x)) + g(f_{2016}(x)) + \cdots + g(x) \neq 0 \end{aligned}$$

例题 3.36

设函数

$$f(x) = \sqrt{e^x + x - a} \quad (a \in \mathbb{R}, e \text{ 为自然对数的底数}),$$

若曲线 $y = \sin x$ 上存在点 (x_0, y_0) , 使得

$$f(f(y_0)) = y_0,$$

则 a 的取值范围是 ()

- A. $[1, e]$
- B. $[e^{-1}, 1]$
- C. $[1, 1 + e]$
- D. $[e^{-1}, e + 1]$

$f(x)$ 的性质是不证自明的: 在定义域上单调递增.

对于这种在定义域上单调递增的函数, 其一阶不动点必为二阶不动点.

$$\begin{aligned} f(x) &> x, f(f(x)) > f(x) > x \\ f(x) &< x, f(f(x)) < f(x) < x \\ f(x) &= x, f(f(x)) = f(x) = x \end{aligned}$$

$$f(f(y_0)) = y_0 \iff f(y_0) = y_0 \in [0, +1]$$

这里必须注意根式的非负性.

$$\begin{aligned} f(y_0) &= \sqrt{e^{y_0} + y_0 - a} = y_0 \\ e^{y_0} + y_0 - a &= y_0^2 \\ a &= e^{y_0} + y_0 - y_0^2 \\ g(x) &= e^x - x^2 + x, x \in [0, 1] \\ g'(x) &= e^x - 2x + 1 \geq (x+1) - 2x + 1 \\ &= 2 - x > 0 \\ a &= g(y_0) \in [g(0), g(1)] \\ a &\in [1, e] \end{aligned}$$

高次迭代与周期

例题 3.37

(2017 · 北大博雅) 已知

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{3}x}{\sqrt{3} - x},$$

定义

$$f_1(x) = f(x), \quad f_{k+1}(x) = f(f_k(x)), \quad k \geq 1,$$

则 $f_{2017}(2017)$ 的值等于 ()

- A. $\frac{2017 + \sqrt{3}}{2017 - \sqrt{3}}$
- B. 2017
- C. $\frac{1 + 2017\sqrt{3}}{2017 + \sqrt{3}}$

D. 前三个答案都不对

必须能注意到鬼畜的正切函数的三角换元:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1 + \sqrt{3}x}{\sqrt{3} - x} \\
 &= \frac{x + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - x \tan \frac{\pi}{6}} \\
 x = \tan \theta, f(x) &= f(\tan \theta) = \tan(\theta + \frac{\pi}{6}) \\
 f_{6n}(x) &= \tan(\theta + n\pi) = \tan \theta = x \\
 f_{2017}(x) &= f_{336 \cdot 6}(f(x)) \\
 &= f(x) \\
 &= \tan(\arctan 2017 + \frac{\pi}{6}) = \frac{1 + 2017\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2017}
 \end{aligned}$$

例题 3.38

已知

$$f(x) = \sqrt{2+x}, \quad f_1(x) = f(x), \quad f_{k+1}(x) = f(f_k(x)),$$

求 $f_{2026}(1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

熟知余弦二倍角公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$, 调整系数得 $2\cos 2\theta + 2 = (2\cos \theta)^2$.

熟悉的形式浮出水面: 令 $x = 2\cos \theta_0 = 1, \theta_0 = \frac{\pi}{3}$, 则

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{2 + 2\cos \theta_0} = 2\cos \frac{\theta_0}{2} \\
 f_2(x) &= 2\cos \frac{\theta_0}{4}, f_3(x) = 2\cos \frac{\theta_0}{8} \\
 &\dots \\
 f_{2026}(1) &= 2\cos \frac{\theta_0}{2^{2026}} = 2\cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{2026}}
 \end{aligned}$$

例题 3.39

(2017 · 北大自主招生) 满足

$$f(f(x)) = [f(x)]^4$$

的实系数多项式 $f(x)$ 的个数为 ()

A. 2

B. 4

C. 无穷多

D. 前三个答案都不对

若 $f(x) = m$ 为常函数, 则 $m = m^4$, $m = 0$ or 1 , 符合题意.

考虑 $f(x)$ 最高次项的次数为 $n \neq 0$, 左式为 n^2 次式, 右式为 $4n$ 次方式, 要求:

$$\begin{cases} n \neq 0, \\ n^2 = 4n \end{cases}$$

解得 $n = 4$.

更进一步, 令 $t = f(x)$, 则 $f(t) - t^4 \equiv 0$, 所以 $f(x) = x^4$.

当然, 我们能做出 $t = f(x)$, 其前提是 $f(x)$ 不是单值函数, t 有无穷多个取值, 根据代数基本定理, 可知 $f(x) \equiv x^4$.