

[2027强基计划]函数与方程

整理《2027强基计划》3.2 函数与方程中的十六道例题，涵盖值域与方程有解、函数图像对称性、整体换元降次及指数与对数函数综合。

2026年7月31日 · 强基计划 · 数学竞赛

值域与方程有解

例题 3.14

(2017 · 清华自主招生暨领军计划) 已知

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

在区间 $(-1, 1)$ 内有两个零点，则 $a^2 - 2b$ 的取值范围为 ()

- A. $(-2, 0)$
- B. $(0, 2)$
- C. $(0, 4)$
- D. $(-2, 2)$

不妨用最直接的方法翻译条件:

$$\begin{aligned} -1 < x_1 < x_2 < 1 \\ f(x_1) = f(x_2) = 0 \\ a = -(x_1 + x_2), b = x_1 x_2 \\ a^2 - 2b = x_1^2 + x_2^2 \in (0, 2) \end{aligned}$$

例题 3.15

函数

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - x + 2}$$

的值域为 ____。

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - x + 2} \\
 &= \frac{x^2 - x + 2 + 5x - 7}{x^2 - x + 2} \\
 &= \frac{5x - 7}{x^2 - x + 2} + 1
 \end{aligned}$$

采取判别式法, 令 $\frac{5x-7}{x^2-x+2} = u (x^2 - x + 2 > 0)$

$$\begin{aligned}
 ux^2 - (u+5)x + (2u+7) &= 0 \\
 \Delta &= (u+5)^2 - 4u(2u+7) \\
 &= -7u^2 - 18u + 25 \geq 0 \\
 \Leftrightarrow (u-1)(7u+25) &\leq 0 \\
 u &\in \left[-\frac{25}{7}, 1\right] \\
 f(x) = u + 1 &\in \left[-\frac{18}{7}, 2\right]
 \end{aligned}$$

例题 3.16

已知函数

$$y = \frac{mx + n}{x^2 + 1}$$

的最大值为 4, 最小值为 -1, 则 $m = \underline{\hspace{1cm}}$, $n = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

同理用判别式法:

$$\begin{aligned}
 yx^2 - mx + (y - n) &= 0 \\
 \Delta &= m^2 - 4y(y - n) \\
 &= -4y^2 + 4ny + m^2 \geq 0 \\
 4y^2 - 4ny - m^2 &= 4(y+1)(y-4) \\
 n = 3, m &= \pm 4
 \end{aligned}$$

或者换一个视角:

$$\begin{aligned}\min \frac{mx+n}{x^2+1} &= -1 \\ \iff x^2 + mx + (n+1) &= 0, \Delta_1 = 0 \\ \max \frac{mx+n}{x^2+1} &= +4 \\ \iff 4x^2 - mx + (4-n) &= 0, \Delta_2 = 0\end{aligned}$$

例题 3.17

已知

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + 6}{x^2 + 2}$$

的最大值为 6，最小值为 2，则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

$$\begin{aligned}(y-a)x^2 - bx + (2y-6) &= 0 \\ \Delta &= b^2 - 4(y-a)(2y-6) \geq 0 \\ 8y^2 - (8a+24)y + (24a-b^2) &= 8(y-6)(y-2) \\ a=5, b &= \pm 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

例题 3.18(2018 · 北大自主招生) 设 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，函数

$$f(x) = a^{2x} - 4a^x - 1$$

在区间 $[-1, 2]$ 上的最小值为 -5 ，则 a 的取值范围为 ()

- A. $a = \frac{1}{2}$ 或 $a \geq \sqrt{2}$
- B. $0 < a < 1$ 或 $a \geq \sqrt{2}$
- C. $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 或 $a \geq \sqrt{2}$
- D. 前三个答案都不对

$$\begin{aligned}(a^x)^2 - 4a^x - 1 &\geq -5 \\ (a^2)^2 - 4a^x + 4 &= (a^x - 2)^2 \geq 0\end{aligned}$$

这个等号可以成立,这意味着 $\log_a 2 \in [-1, 2]$, $a \in (0, \frac{1}{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$

例题 3.19

若集合

$$\{x \mid 4x|x| - a|x| = 1\}$$

恰有 3 个元素, 则 a 的取值范围是 _____。

分类去绝对值($x \neq 0$):

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } 4x^2 - ax = 1$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } 4x^2 - ax = -1$$

每种情况可能贡献 0, 1, 2 个 x , 所以 3 个元素只能由 $1 + 2$ 产生:

注意到 $4x^2 - ax - 1 = 0$, $\Delta = a^2 + 4 > 0$, $x_1 x_2 < 0$, 故 $x_1 < 0 < x_2$, 所以有且仅有一个 $x > 0$ 满足条件:

$$\begin{cases} 4x^2 - ax + 1 = 0 (x_3 < x_4 < 0) \\ \Delta = a^2 - 16 > 0, \\ x_3 x_4 = \frac{1}{4} > 0, \\ x_3 + x_4 = \frac{a}{4} < 0 \end{cases} \iff a \in (-\infty, -4)$$

例题 3.20

(交大) 设 $f(x) = |\lg x|$, a, b 为实数, 且 $0 < a < b$ 。若 a, b 满足

$$f(a) = f(b) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

试写出 a 与 b 的关系, 并证明在这一关系中存在 b 满足 $3 < b < 4$ 。

容易知道 $a < 1 < b$, $ab = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{2} &> \sqrt{ab} = 1 \\
f(a) = f(b) &= 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
-\lg a = \lg b &= 2\lg \frac{a+b}{2} \\
b &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\
b &= \left(\frac{\frac{1}{b}+b}{2}\right)^2 \\
4b &= b^2 + 2 + \frac{1}{b^2} \\
b^2 - 4b + \frac{1}{b^2} + 2 &= 0 \\
f(x) &= x^2 - 4x + \frac{1}{x^2} + 2 \\
f(3) &= 11 - 12 + \frac{1}{9} < 0 \\
f(4) &= \frac{1}{16} + 2 > 0 \\
\therefore \exists b \in (3, 4), f(a) = f(b) &= 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned}$$

函数图像的对称性

例题 3.21

证明函数

$$f(x) = \frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

的图象关于点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 中心对称。

$$\begin{aligned}
&f(x) + f(1-x) \\
&= \frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}} + \frac{a^{1-x}}{a^{1-x} + \sqrt{a}} \\
&= \frac{a^x(a^{1-x} + \sqrt{a}) + a^{1-x}(a^x + \sqrt{a})}{(a^x + \sqrt{a})(a^{1-x} + \sqrt{a})} \\
&= \frac{1 + a^{x+\frac{1}{2}} + a^{\frac{3}{2}-x} + a}{1 + a^{x+\frac{1}{2}} + a^{\frac{3}{2}-x} + a} = 1
\end{aligned}$$

更有技巧的方法: $\frac{a^{1-x}}{a^{1-x}+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a^x+\sqrt{a}}$

例题 3.22

已知函数

$$f(x) = \frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}} \quad (a > 0, a \neq 1),$$

则

$$f\left(\frac{1}{1000}\right) + f\left(\frac{2}{1000}\right) + \cdots + f\left(\frac{999}{1000}\right) = \underline{\quad}.$$

用3.21结论首尾配对: $f(x) + f(1-x) = 1$

$$\begin{aligned} 2[f\left(\frac{1}{1000}\right) + f\left(\frac{2}{1000}\right) + \cdots + f\left(\frac{999}{1000}\right)] &= 999 \\ f\left(\frac{1}{1000}\right) + f\left(\frac{2}{1000}\right) + \cdots + f\left(\frac{999}{1000}\right) &= \frac{999}{2} \end{aligned}$$

例题 3.23

函数

$$\begin{aligned} f(x) &= |x+1| + |x+2| + \cdots + |x+2018| \\ &\quad + |x-1| + |x-2| + \cdots + |x-2018|, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

则 $f(x)$ 是 _____ 函数 (判断奇偶性), 满足条件

$$f(a^2 - 3a + 2) = f(a - 1)$$

的所有整数 a 的和为 _____。

显然 $f(x)$ 为偶函数.

考虑 $n = 1, 2$ 时的简单 $f_n(x)$, 可知 $f_{2018}(x) = f_{2018}(y) \iff \begin{cases} x = y, \\ \text{or } x + y = 0, \\ \text{or } x, y \in [-1, 1] \end{cases}$

$$a^2 - 3a + 2 = a - 1 \iff a = 1, 3$$

$$(a^2 - 3a + 2) + (a - 1) = 0 \iff a = 1$$

$$(a^2 - 3a + 2), (a - 1) \in [-1, 1] \iff a = 1, 2$$

所有可能的整数 a 之和: $1 + 2 + 3 = 6$

整体换元与降次求最值

例题 3.24

(2017 · 北大自主招生) 函数

$$f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$$

的最小值为 ()

- A. -1
- B. -1.5
- C. -2
- D. 前三个答案都不对

通过恰当的调整乘法顺序,我们可以提取公共部分:

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x+1)(x+2)(x+3) \\ &= f(x) = x(x+3)(x+1)(x+2) \\ &= (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) \\ x^2 + 3x &= t \in \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right] \\ t(t+2) &= (t+1)^2 - 1 \in [-1, +\infty] \end{aligned}$$

例题 3.25

(2013 · 课标全国 I 卷 · 理16) 若函数

$$f(x) = (1 - x^2)(x^2 + ax + b)$$

的图象关于直线 $x = -2$ 对称, 则 $f(x)$ 的最大值为 _____。

我们有样学样,考虑零点后配对分组:

$$\begin{aligned}
 f(+1) &= 0, f(-1) = 0 \\
 \implies f(-5) &= 0, f(-3) = 0 \\
 f(x) &= (1-x^2)(x+5)(x+3) \\
 &= -(x+1)(x+3)(x-1)(x+5) \\
 &= -(x^2+4x+3)(x^2+4x-5) \\
 &= -(x^2+4x-1)^2 + 16 \leq 16
 \end{aligned}$$

或者,考虑多项式函数有对称轴的充要条件:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -x^4 - ax^3 - (b-1)x^2 + ax + b \\
 &= -(x+2)^4 + u(x+2)^2 + v \\
 &= -(x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16) + u(x^2 + 4x + 4) + v
 \end{aligned}$$

比较系数,得:

$$\begin{cases} -a = -8, \\ -(b-1) = -24 + u, \\ a = -32 + 4u, \\ b = -16 + 4u + v \end{cases}$$

解得:

$$\begin{cases} a = 8, \\ b = 15, \\ u = 10, \\ v = -9 \end{cases}$$

这意味着: $f(x) = -(x+2)^4 + 10(x+2)^2 - 9$

不难看出 $f(x)$ 相当于换元 $t = (x+2)^2 \geq 0$ 的二次函数:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -t^2 + 10t - 9 \\
 &= -(t-5)^2 + 16 \geq 16
 \end{aligned}$$

例题 3.26

(复旦) 设 $x \in \mathbb{R}$, 求函数

$$f(x) = \frac{16^x + 4^{1-x} + 4 \times 2^x + 1}{4^x + 2^{1-x}}$$

的最小值。

令 $t = 2^x \in (0, +\infty)$, 则:

$$\begin{aligned} f(x) = g(t) &= \frac{t^4 + \frac{4}{t^2} + 4t + 1}{t^2 + \frac{2}{t}} \\ &= \frac{(t^2 + \frac{2}{t})^2 + 1}{(t^2 + \frac{2}{t})} \\ &= (t^2 + \frac{2}{t}) + \frac{1}{(t^2 + \frac{2}{t})} \\ (t^2 + \frac{2}{t}) &= t^2 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t} \geq 3 \\ \therefore f(x) = g(t) &\geq \frac{10}{3} \end{aligned}$$

指数函数与对数函数综合

例题 3.27

设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 证明: 方程

$$a^x + a^{-x} = 2a$$

的根不在区间 $[-1, 1]$ 内。

采取反证法: 由于对称性, 假设 $\exists x_0 \in [0, +1], a^{x_0} + \frac{1}{a^{x_0}} = 2a$

$$\begin{aligned} a > 1, a^{x_0} &\in [1, a], a^{x_0} + \frac{1}{a^{x_0}} \in [2, a + \frac{1}{a}] \\ \therefore a^{x_0} + \frac{1}{a^{x_0}} &< 2a \\ 0 < a < 1, a^{x_0} &\in [a, 1], a^{x_0} + \frac{1}{a^{x_0}} \in [2, a + \frac{1}{a}] \\ \therefore a^{x_0} + \frac{1}{a^{x_0}} &> 2a \end{aligned}$$

综上所述, 假设不成立。

例题 3.28

(复旦) 已知 $a > 0$, 设

$$f(x) = 4^{x-1} - 2^{x+a-1}.$$

若 $x_1 x_2 = a^2$, 且 $x_2 > x_1 > 0$, 试比较 $f(x_2)$ 和 $f(x_1)$ 的大小。

$$\begin{aligned} x_1 x_2 = a^2 &\implies x_2 > a > x_1 > 0 \\ f(x) &= (2^{x-1})^2 - 2^a \cdot 2^{x-1} \\ &= \frac{1}{4} [(2^x)^2 - 2 \cdot 2^a \cdot 2^x] \\ &= \frac{1}{4} [(2^x - 2^a)^2 - 2^{2a}] \\ f(x_2) - f(x_1) &= \frac{1}{4} (2^{x_2} - 2^{x_1})(2^{x_1} + 2^{x_2} - 2 \cdot 2^a) \\ 2^{x_1} &< 2^a < 2^{x_2}, 2^{x_2} - 2^{x_1} > 0 \\ 2^{x_1} + 2^{x_2} - 2 \cdot 2^a &> 2 \cdot 2^{\frac{x_1+x_2}{2}} - 2 \cdot 2^a \\ &> 2 \cdot 2^{\sqrt{x_1 x_2}} - 2 \cdot 2^a = 0 \\ \therefore f(x_2) - f(x_1) &> 0, f(x_2) > f(x_1) \end{aligned}$$

例题 3.29

不等式

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{(x+3)^3(x-5)^3}} \cdot 7^{(x+3)^2(x-5)} \leq 1$$

的解集为 _____。

先保证定义域: $(x+3)^3(x-5)^3 \geq 0, x \in (-\infty, -3] \cup [5, +\infty)$

对定义域的两段进行分类:

$$\begin{aligned}
 & x \in (-\infty, -3], \\
 \Rightarrow & \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{(x+3)^3(x-5)^3}} \leq 1, 7^{(x+3)^2(x-5)} \leq 1 \\
 & x \in [+5, +\infty) \\
 & \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{(x+3)^3(x-5)^3}} \cdot 7^{(x+3)^2(x-5)} \\
 & = \left(\frac{1}{2}\right)^{(x+3)^{\frac{3}{2}}(x-5)^{\frac{3}{2}}} \cdot 7^{(x+3)^2(x-5)} \\
 & = \left(\frac{7}{2}\right)^{(x+3)^{\frac{3}{2}}(x-5)^{\frac{3}{2}}} \cdot 7^{(x+3)^{\frac{1}{2}}(x-5)^{\frac{-1}{2}}} \geq 1 (x=5)
 \end{aligned}$$

综上,解集为 $(-\infty, -3] \cup \{5\}$