

[2027强基计划]构造函数

整理《2027强基计划》3.1 构造函数中的十三道例题，涵盖方程结构统一模型、指数与对数方程同构及嵌套函数。

2026年7月31日 · 强基计划 · 数学竞赛

从方程结构中发现统一模型

例题 3.1

(香港中文大学 · 改编) 已知

$$\frac{x}{\sin^2 72^\circ + 2026} + \frac{y}{\sin^2 72^\circ - 2025} = 1, \quad \frac{x}{\sin^2 18^\circ + 2026} + \frac{y}{\sin^2 18^\circ - 2025} = 1,$$

求 $x + y$ 的值。

应当注意到, 2026, -2025 不是本质的, $\sin^2 72^\circ + \sin^2 18^\circ = 1$ 才是重点:

显然 $\sin^2 72^\circ, \sin^2 18^\circ$ 是关于 t 的方程

$$\frac{x}{t + 2026} + \frac{y}{t - 2025} = 1$$

的两根.

去分母, 按 t 的降幂排列:

$$t^2 + (1 - x - y)t - (2025 \cdot 2026 - 2025x - 2026y) = 0$$

所以 $\sin^2 72^\circ + \sin^2 18^\circ = (x + y - 1)$, 得 $x + y = 2$

例题 3.2

已知 $x, y \in \mathbb{R}$ 满足

$$\begin{cases} (x - 2)^3 + 2023(x - 2) = 1, \\ (y - 2)^3 + 2023(y - 2) = -1, \end{cases}$$

若对任意的 $t > 0$, $t + \frac{k}{t} \geq x + y$ 恒成立, 则实数 k 的最小值为 ____。

注意到同构的形式, 令:

$$f(x) = x^3 + 2023x$$

显然 $f(x)$ 为单增的奇函数, $f(x-2) = -f(y-2) = f(2-y)$, 必有 $x-2 = 2-y$.

对任意的 $t > 0$, $t + \frac{k}{t} \geq x + y = 4$ 恒成立

取 $x = 2 \implies k \geq 4$, 显然由均值不等式知合题意.

例题 3.3

已知实数 a, b 满足等式

$$a^3 - 3a^2 + 5a - 4 = 0, \quad b^3 - 3b^2 + 5b - 2 = 0,$$

则 $a + b$ 的值为 ____。

有3.2前车之鉴, 考虑构造递增的奇函数:

$$\begin{aligned} a^3 - 3a^2 + 5a - 4 &= (a-1)^3 + 2(a-1) - 1 = 0, \\ b^3 - 3b^2 + 5b - 2 &= (b-1)^3 + 2(b-1) + 1 = 0 \\ f(x) &= x^3 + 2x, f(a-1) = -f(b-1) = f(1-b) \end{aligned}$$

故 $a-1 = 1-b, a+b = 2$

例题 3.4

(2017 · 清华自主招生暨领军计划) 设 x, y 满足

$$(3x+y)^5 + x^5 + 4x + y = 0,$$

则点 (x, y) 的轨迹方程为 ____。

移项得: $(3x+y)^5 + (3x+y) = -(x^5+x)$

构造的函数为 $f(x) = x^5 + x, f(3x+y) = -f(x) = f(-x)$, 于是 $3x+y = -x, y = -4x$

例题 3.5

解方程

$$\sqrt{13 - \sqrt{13 + x}} = x.$$

容易发现,左式关于 x 单减,右式关于 x 单增,且 $x = 3$ 是唯一可行的根.

更有技巧一些的方法是换元 $y = \sqrt{13 + x}$,则:

$$\begin{cases} \sqrt{13 - y} = x, \\ \sqrt{13 + x} = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y = 13, \\ y^2 - x = 13 \end{cases}$$

两式相减得:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + (x + y) &= 0 \\ (x + y)[(x - y) + 1] &= 0 \\ x + y = 0 \text{ or } x &= y - 1 \end{aligned}$$

$\sqrt{13 - \sqrt{13 + x}} = x \geq 0$, $\sqrt{13 + x} = y \geq \sqrt{13}$, 所以 $x + y = 0$ 不可达.

$$\begin{aligned} x^2 + (x + 1) &= 13 \\ x^2 + x - 12 &= 0 \\ x &= 3 \text{ or } -4(\text{discarded}) \end{aligned}$$

例题 3.6

已知

$$\log_{\sqrt{7}}(5a - 3) = \log_{\sqrt{a^2 + 1}} 5,$$

则实数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

换底,让常数与变量分离:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(5a - 3)}{\ln \sqrt{7}} &= \frac{\ln 5}{\ln \sqrt{a^2 + 1}} \\ \ln(5a - 3) \ln \sqrt{a^2 + 1} &= \ln 5 \ln \sqrt{7} \\ \ln(5a - 3) \ln(a^2 + 1) &= \ln 5 \ln 7 \end{aligned}$$

注意到左式关于 a 递增,且 $a = 2$ 可行,故 $a = 2$ 是唯一解.

指数、对数方程的同构

例题 3.7

设 a, b 分别是方程

$$\log_2 x + x - 5 = 0$$

和

$$2^x + x - 5 = 0$$

的根, 求 $a + b$ 的值。

使用数形结合:

$$f(x) = \log_2 x, g(x) = 2^x, y = 5 - x$$

显然 $f(x), g(x)$ 互为反函数,关于 $y = x$ 对称,故二者与对称轴一条垂线 $y = 5 - x$ 的两交点中点也在 $y = x$ 上,于是有:

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2} &= \frac{5}{2}, \\ \frac{f(a)+f(b)}{2} &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

所以 $a + b = 5$.

或者考虑指对同构:

$$\begin{aligned}f(x) &= 2^x + x \\ f(b) &= 5, f(\log_2 a) = 5 \\ \implies b &= \log_2 a \\ \log_2 a + a - 5 &= 0 \\ a + b - 5 &= 0\end{aligned}$$

例题 3.8

若实数 x, y 满足

$$2^x + 4x + 12 = \log_2(y-1)^3 + 3y + 12 = 0,$$

则 $x + y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

故技重施: $\begin{cases} 2^{x-2} + (x-2) + 5 = 0, \\ \log_2(y-1) + (y-1) + 5 = 0 \end{cases}$ 同理 $x-2 + (y-1) = -5, x+y = -2$

例题 3.9

(2017 · 北大自主招生) 方程

$$\log_4(2^x + 3^x) = \log_3(4^x - 2^x)$$

的实根个数为 ()

A. 0

B. 1

C. 3

D. 前三个答案都不对

先观察 x 的范围: $4^x - 2^x = 2^x(2^x - 1) > 0, x > 0$.

设中间量 t .

$$\begin{aligned} \log_4(2^x + 3^x) = t &= \log_3(4^x - 2^x) \\ &\begin{cases} 2^x + 3^x = 4^t \\ 2^x + 3^t = 4^x \end{cases} \\ \therefore 3^x - 3^t &= 4^t - 4^x \\ \therefore 3^x + 4^x &= 3^t + 4^t \\ \therefore f(x) &= 3^x + 4^x \uparrow \\ \therefore 2^x + 3^x = 4^x &\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x = 1 \\ g(x) &= \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x \downarrow \\ g(2) = 2 \quad g(\infty) &< 1 \end{aligned}$$

所以 $g(x) = 1$ 有唯一解, 对应方程的唯一解.

例题 3.10

解方程

$$\log_{14}(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}) = \log_2 \sqrt[6]{x}.$$

设中间量 t .

$$\begin{aligned}\log_{14}(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}) &= \log_2 \sqrt[6]{x} = t \\ \sqrt[6]{x} &= 2^t, \\ \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} &= 14^t \\ 8^t + 4^t + 2^t &= 14^t \\ \left(\frac{4}{7}\right)^t + \left(\frac{2}{7}\right)^t + \left(\frac{1}{7}\right)^t &= 1\end{aligned}$$

只能有 $t = 1, \sqrt[6]{x} = 2, x = 64$

例题 3.11

已知

$$4^{\log_6 x} + x = 9^{\log_6 x}, \quad 6^{\log_4 y} + y = 9^{\log_4 y},$$

则 $\frac{y}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

试着双换元: $\log_6 x = m, \log_4 y = n$, 则:

$$\begin{aligned}x &= 6^m, y = 4^n \\ 4^m + 6^m &= 9^m \\ 6^n + 4^n &= 9^n\end{aligned}$$

容易知道 m, n 唯一确定且 $m = n = t$, 其中 $\left(\frac{4}{9}\right)^t + \left(\frac{2}{3}\right)^t = 1$ 。

$$\begin{aligned}\frac{y}{x} &= \left(\frac{2}{3}\right)^t \\ \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right) - 1 &= 0 \\ \frac{y}{x} &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

嵌套函数

例题 3.12

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的严格单调函数, 满足

$$f[f(x) - e^x] = 1,$$

且 $f(a) < f(b) < e$ 。若

$$\log_a b + \log_b a = \frac{10}{3},$$

则 a 与 b 的关系是 ()

A. $a = b^3$

B. $b = a^3$

C. $b = a^4$

D. $a = b^4$

对于"单调函数"这个条件,常见的处理方法是:

$$\begin{aligned} f(t) &= 1, t = f(x) - e^x \\ f(x) &= e^x + t, f(t) = e^t + t = 1 \\ &\implies t = 0 \\ f(x) &= e^x \\ f(a) &< f(b) < e \\ \iff e^a &< e^b < e^1 \\ a &< b < 1 \end{aligned}$$

自此, $f(x)$ 条件已利用完毕.

$$\begin{aligned} \log_a b + \log_b a &= \frac{10}{3} \\ \log_a b + \frac{1}{\log_a b} &= \frac{10}{3} (\log_a b < 1) \\ \log_a b &= \frac{1}{3}, b = a^{\frac{1}{3}}, a = b^3 \end{aligned}$$

例题 3.13

已知在定义域内单调的函数 $f(x)$ 满足

$$f\left(f(x) + \frac{1}{2^x + 1} - \ln x\right) = \frac{2}{3}$$

恒成立。解不等式

$$f(7+2x) > -\frac{2^x}{2^x+1} + \ln(-x) + 1.$$

模仿3.12, 设 $f(x) + \frac{1}{2^x+1} - \ln x = t$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x - \frac{1}{2^x+1} + t \\ f(t) &= \ln t - \frac{1}{2^t+1} + t = \frac{2}{3} \iff t = 1 \\ f(x) &= \ln x - \frac{1}{2^x+1} + 1 \\ f(7+2x) &> -\frac{2^x}{2^x+1} + \ln(-x) + 1 = f(-x) \\ 7+2x &> -x, x > -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

当然, 不要忘记定义域的约束 $-x > 0, 7+2x > 0$, 综合考虑得 $x \in (-\frac{7}{3}, 0)$