

2027 年强基计划数学：均值不等式

本文整理均值不等式的 22 道典型例题，涵盖分母换元、增量换元、配凑取等、局部不等式与乘积条件下的最值估计，适合强基计划和数学竞赛基础阶段系统复习。

2026年7月11日 · 强基计划 · 数学竞赛 · 不等式

例2.1

已知 $a > b > c$ ，使得不等式

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} \geq \frac{k}{a-c}$$

恒成立的实数 k 的最大值为_____。

分母繁杂,换元分母:

$$a-b=x, b-c=y, a-c=x+y$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{(1+1)^2}{x+y} \implies k \leq 4$$

例2.2

设 a, b, c 是正实数，求证：

$$\frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c} \geq 12\sqrt{2} - 17.$$

分母繁杂,换元分母:

$$\begin{aligned}
 a + 2b + c &= x, a + b + 2c = y, a + b + 3c = z \\
 \begin{cases} a = -x + 5y - 3z, \\ b = x - 2y + z, \\ c = 0x - y + z \end{cases} \\
 \frac{-x + 2y}{x} + \frac{4x - 8y + 4z}{y} + \frac{8y - 8z}{z} \\
 = -17 + 2\frac{y}{x} + 4\frac{x}{y} + 4\frac{z}{y} + 8\frac{y}{z} \\
 \geq -17 + 2\sqrt{2 \cdot 4} + 2\sqrt{4 \cdot 8} = -17 + 12\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

例2.3

已知 $a > b > 0$ ，那么 $a^2 + \frac{1}{b(a-b)}$ 的最小值为

A. 2

B. 4

C. $2\sqrt{5}$

D. 5

先考虑b:

$$\begin{aligned}
 a^2 + \frac{1}{b(a-b)} \\
 \geq a^2 + \frac{4}{a^2} \geq 4
 \end{aligned}$$

或者考虑增量代换:

$$\begin{aligned}
 b = x, a = x + y \\
 (x + y)^2 + \frac{1}{xy} \\
 \geq 4xy + \frac{1}{xy} \geq 4
 \end{aligned}$$

例2.4

(2012 清华夏令营) 已知 a, b, c 是三角形 $\triangle ABC$ 的三条边的边长，则以下判断正确的是

A. $\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

B. $\frac{3}{2} < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

C. $\frac{3}{2} < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq 2$

D. $\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq 2$

$$a < b + c \implies \frac{2a}{a+b+c} > \frac{a}{b+c}$$

轮换 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$, 得到:

$$b < c + a \implies \frac{2b}{a+b+c} > \frac{b}{c+a}$$

$$c < a + b \implies \frac{2c}{a+b+c} > \frac{c}{a+b}$$

累加: $S < 2$

下面考虑下界, 仍然故技重施, 换元分母, 使用AM-GM不等式:

$$\begin{aligned} b+c &= x, c+a = y, a+b = z \\ S &= \frac{\frac{y+z-x}{2}}{x} + \frac{\frac{z+x-y}{2}}{y} + \frac{\frac{x+y-z}{2}}{z} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) - \frac{3}{2} \\ &\geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

选A.

例2.5

若正数 x, y 满足 $x^2 + 2xy - 1 = 0$, 则 $2x + y$ 的最小值是

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}
 2x + y &= u, y = u - 2x \\
 x^2 + 2(u - 2x)x - 1 &= 0 \\
 3x^2 - 2ux + 1 &= 0 \\
 \Delta &= 4u^2 - 12 \geq 0 \\
 u &\geq \sqrt{3} (x = y = \frac{\sqrt{3}}{3})
 \end{aligned}$$

或者考虑换元:

$$\begin{aligned}
 x(x + 2y) &= 1 \\
 2x + y &= \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}(x + 2y) \geq \sqrt{3x(x + 2y)} = \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

例2.6

若正数 a, b, c 满足 $a(a + b + c) + bc = 4$, 则式子 $3a + 2b + c$ 的最小值为_____。

$$\begin{aligned}
 a^2 + ab + ac + bc &= (a + b)(a + c) = 4 \\
 3a + 2b + c &= 2(a + b) + (a + c) \\
 &\geq 2\sqrt{2(a + b)(a + c)} = 4\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

例2.7

设 $x, y, z > 0$, 则

$$\frac{xy + 2yz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

的最大值为_____。

$$\begin{aligned}
 &\frac{xy + 2yz}{x^2 + y^2 + z^2} \\
 &= \frac{xy + 2yz}{x^2 + \frac{1}{5}y^2 + \frac{4}{5}y^2 + z^2} \\
 &\leq \frac{xy + 2yz}{2\sqrt{\frac{1}{5}}xy + 2\sqrt{\frac{4}{5}}yz} \\
 &\leq \frac{\sqrt{5}}{2}
 \end{aligned}$$

例2.8

已知 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, a + b + c = 1$, 求 $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1}$ 的最大值。

根据取等凑均值:

$$\sqrt{(4a+1)\frac{7}{3}} \leq \frac{4a+1+\frac{7}{3}}{2}$$

化简系数:

$$\begin{aligned}\sqrt{4a+1} &\leq \frac{2\sqrt{21}}{7}a + \frac{5\sqrt{21}}{7} \\ \sqrt{4b+1} &\leq \frac{2\sqrt{21}}{7}b + \frac{5\sqrt{21}}{7} \\ \sqrt{4c+1} &\leq \frac{2\sqrt{21}}{7}c + \frac{5\sqrt{21}}{7} \\ S &\leq \frac{2\sqrt{21}}{7}(a+b+c) + \frac{5\sqrt{21}}{7} = \sqrt{21}\end{aligned}$$

例2.9

(浙江大学) 设正数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 之和等于 1 ($n \geq 2$), 求证:

$$\frac{1}{x_1 - x_1^3} + \frac{1}{x_2 - x_2^3} + \dots + \frac{1}{x_n - x_n^3} > 4$$

考虑局部不等式:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x - x^3} &\geq 4x, x \in (0, 1) \\ \iff (2x^2 - 1)^2 &\geq 0 \left(x = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned}$$

显然, 不可能每个 x 都是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, Q.E.D

例2.10

已知 $a_i > 0$, 且 $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 1$, 求 $(a_1 + 2)(a_2 + 2) \cdots (a_n + 2)$ 的最小值。

仍旧抓住等号的手:

$$\begin{aligned} & (a_1 + 1 + 1)(a_2 + 1 + 1) \cdots (a_n + 1 + 1) \\ & \geq 3^n \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n} = 3^n \end{aligned}$$

例2.11

已知 $x > 0$, 求 $x^2 + \frac{16}{x}$ 的最小值。

$$\begin{aligned} & x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x} \\ & \geq 3\sqrt[3]{8^2} = 12 (x = 2) \end{aligned}$$

例2.12

已知 $x > 0$, 求 $x^2 + \frac{1}{x^3}$ 的最小值。

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2x^3} \\ & \geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{3^3 \cdot 2^2}} = \frac{5}{6}\sqrt[5]{72} \end{aligned}$$

例2.13

已知 $0 < x < 1$, 求 $x^2\sqrt{1-x}$ 的最值。

下确界显然为0, 无最小值, 考虑最大值:

$$\begin{aligned} & x^2\sqrt{1-x} \\ & = \sqrt{x^4(1-x)} \\ & = \frac{1}{2}\sqrt{x \cdot x \cdot x \cdot x(4-4x)} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^5} = \frac{16\sqrt{5}}{125} (x = \frac{4}{5}) \end{aligned}$$

例2.14

设 $x > -\frac{1}{2}$, 则 $f(x) = x^2 + x + \frac{4}{2x+1}$ 的最小值为_____。

换元分母: $t = 2x + 1 > 0$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + \frac{t-1}{2} + \frac{4}{t} \\
 &= \frac{t^2}{4} + \frac{4}{t} - \frac{1}{4} \\
 &= \frac{t^2}{4} + \frac{2}{t} + \frac{2}{t} - \frac{1}{4} \geq 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \quad (t=2, x=\frac{1}{2})
 \end{aligned}$$

例2.15

设 $a + 3b = 3$ ，求代数式 $3^a + 9^b$ 的最小值。

$$\begin{aligned}
 3^a + 9^b &= 3^a + 3^{2b} \\
 &= \frac{3^a}{2} + \frac{3^a}{2} + \frac{3^{2b}}{3} + \frac{3^{2b}}{3} + \frac{3^{2b}}{3} \\
 &\geq 5\sqrt[5]{\frac{3^{2a+6b}}{2^2 \cdot 3^3}} = 5\sqrt[5]{\frac{3^3}{2^2}} = \frac{5}{2}(15)^{\frac{3}{5}}
 \end{aligned}$$

例2.16

设 $a > b > 0$ ，求证 $\sqrt{2a^3} + \frac{3}{ab-b^2} \geq 10$ 。

$$① \geq \sqrt{2} \cdot (2\sqrt{xy})^3 + \frac{3}{xy}$$

$$= 8\sqrt{2}(xy)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{xy}$$

$$= 4\sqrt{2}(xy)^{\frac{3}{2}} + 4\sqrt{2}(xy)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{xy}$$

$$\geq 5\sqrt[5]{32} = 10$$

$$② \geq \sqrt{2}(x+y)^3 + \frac{12}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)^3 + \frac{4}{(x+y)^2} + \frac{4}{(x+y)^2} + \frac{4}{(x+y)^2}$$

$$\geq 5\sqrt[5]{32} = 10$$

例2.17

设 a, b, c 是正实数，且 $a + b + c = 1$ ，求证： $\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ac} + \frac{1}{c+ab} \geq \frac{27}{4}$ 。

等号显然是 $a = b = c = \frac{1}{3}$ 。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a+bc} \\ &= \frac{1}{a(a+b+c)+bc} \\ &= \frac{1}{(a+b)(a+c)} \\ S &\geq 3\sqrt[3]{\frac{1^3}{(a+b)(a+c)(b+c)(b+a)(c+a)(c+b)}} \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{(\frac{4}{6})^6}} = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

例2.18

已知正实数 a, b 满足 $ab(a+b) = 4$ ，则 $2a+b$ 的最小值为_____。

$$\begin{aligned} 4uv &= (ua)(vb)(a+b) \leq \left(\frac{(u+1)a + (v+1)b}{3}\right)^3 \\ \frac{u+1}{v+1} &= 2, ua = vb = a+b = k \\ u &= 2v+1, a = \frac{k}{2v+1}, b = \frac{k}{v} \\ \frac{1}{v} + \frac{1}{2v+1} &= 1 \\ \implies v &= \frac{1+\sqrt{3}}{2}, u = 2+\sqrt{3} \\ \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{2}(2a+b)}{3} &\geq \sqrt[3]{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+2)} = 1+\sqrt{3} \\ 2a+b &\geq 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

或者一个更考验注意力的解法：

$$\begin{aligned} (2a+b)^2 &= 4a(a+b) + b^2 \geq \frac{16}{b} + b^2 \geq 12 \\ \implies 2a+b &\geq 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

例2.19

设 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, 求证: $n(n+1)^{1/n} - n < S_n < n - (n-1)n^{-1/(n-1)}$ ($n > 1$)。

Key:1的配对

$$\begin{aligned} S_n + n &= \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{n+1}{n} \geq n(n+1)^{\frac{1}{n}} \\ n - S_n &= 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n-1}{n} \geq (n-1)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \end{aligned}$$

例2.20

证明: $1 - \frac{1}{2012} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2013} \right) > \frac{1}{\sqrt[2012]{2013}}$ 。

仍然注意1的配对:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2012 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2013} \right) &> 2012 \sqrt[2013]{\frac{1}{2023}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{2012}{2013} &> 2012 \sqrt[2013]{\frac{1}{2023}} \end{aligned}$$

例2.21

已知 m, n 是正整数, 且 $1 < m < n$, 求证: $(1+m)^n > (1+n)^m$ 。

$$\begin{aligned} &(1+n)^m \cdot \underbrace{1 \times 1 \times \cdots \times 1}_{n-m \uparrow} \\ &< \left(\frac{(n-m) + m(1+n)}{n} \right)^n = (1+m)^n \end{aligned}$$

例2.22

设 $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} > 0$, 满足 $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_{n+1}} = 1$, 求证: $x_1 x_2 \cdots x_{n+1} \geq n^{n+1}$ 。

取等条件:全为n.

用换元法利用条件:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1+x_i} &= a_i \\
 x_i &= \frac{1}{a_i} - 1 \\
 x_i &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}}{a_i} - 1 \\
 x_i &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_{n+1}}{a_i} \\
 &\geq \frac{n \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_{n+1}}}{a_i} \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n+1)
 \end{aligned}$$

全部累乘即证