

2027 年强基计划数学：代数变形

本文围绕代数变形整理 15 道典型例题，涵盖恒等式、因式分解、对称式处理与常见变量代换，重点展示如何通过结构观察化繁为简，适合强基计划和数学竞赛基础阶段复习。

2026年7月10日 · 强基计划 · 数学竞赛 · 代数

例1.1

设 x 满足条件 $x^3 - \frac{1}{x^3} = 8\sqrt{5}$, 则 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 的值为?

立方和差恒等式:

- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

显然,这道题可以使用恒等式解决:

$$\begin{aligned}x^3 - \frac{1}{x^3} &= 8\sqrt{5} \\(x - \frac{1}{x})^3 + 3(x - \frac{1}{x}) &= 8\sqrt{5} \\[(x - \frac{1}{x}) - \sqrt{5}][(x - \frac{1}{x})^2 + \sqrt{5}(x - \frac{1}{x}) + 8] &= 0\end{aligned}$$

对于第二个括号, $\Delta = 5 - 32 < 0$

所以只能是: $x - \frac{1}{x} = \sqrt{5}$

于是 $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x - \frac{1}{x})^2 + 2 = 7$

例1.2

已知在实数范围内: $x + y = u + v$, $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$, 求证: $x^n + y^n = u^n + v^n$

可以发现, 条件相当于两个质量相同的物体发生弹性碰撞, 速度交换(其实也可以各自保持原先的速度).

目标: $\{x, y\} = \{u, v\}$

$$\begin{aligned}
 x + y &= u + v \\
 x^2 + y^2 + 2xy &= u^2 + v^2 + 2uv \\
 \begin{cases} x + y = u + v, \\ xy = uv \end{cases}
 \end{aligned}$$

所以, $\{x, y\}, \{u, v\}$ 是同一个一元二次方程的两根, 目标证毕.

例1.3

(北大) 已知 $x \neq y$, 且 $x^2 = 2y + 5, y^2 = 2x + 5$, 则 $x^3 - 2x^2y^2 + y^3 = ?$

$$\begin{aligned}
 x^2 - y^2 &= 2(y - x) \\
 x + y &= -2 \\
 x^3 + y^3 - 2x^2y^2 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) - 2x^2y^2 \\
 &= 6xy - 2x^2y^2 - 8 \\
 x^2y^2 &= (2x + 5)(2y + 5)(*) \\
 x^2y^2 - 4xy - 10(x + y) - 25 &= 0 \\
 x^2y^2 - 4xy - 5 &= 0 \\
 xy &= -1, xy = 5 \\
 x^3 + y^3 - 2x^2y^2 &= 6 \times 5 - 2 \times 5^2 - 8 = -28 \\
 x^3 + y^3 - 2x^2y^2 &= 6 \times (-1) - 2 \times (-1)^2 - 8 = -16
 \end{aligned}$$

很不幸, 上述的解法看似巧妙, 但是导致了增根, 原因在于(*)变形不恒等.

$$\begin{aligned}
 x^2 &= 2(-x - 2) + 5 \\
 x^2 + 2x - 1 &= 0 \\
 y^2 + 2y - 1 &= 0 (y \neq x) \\
 \begin{cases} xy = -1, \\ x + y = -2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

所以, 只有 -16 是可行的答案.

例1.4

(2016 北京大学博雅计划) 三个不同的实数 x, y, z 满足 $x^3 - 3x^2 = y^3 - 3y^2 = z^3 - 3z^2$, 求 $x + y + z = ?$

显然根据一元三次方程韦达定理, $x + y + z = +3$

例1.5

(2017北京大学自主招生)实数 a, b 满足 $(a^2 + 4)(b^2 + 1) = 5(2ab - 1)$,求 $b(a + \frac{1}{a})$ 的值.

贸然求解不可行,先尝试韦达定理或者均值不等式的取等条件:

$$(ab)^2 + (a^2 + 4b^2) + 9 - 10ab = 0 \geq (ab)^2 - 6ab + 9 = (ab - 3)^2$$

于是得到 $\begin{cases} ab = 3, \\ \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \end{cases}$

所以: $b(a + \frac{1}{a}) = \frac{7}{2}$

事实上,更自然的方法是主元法:

$$\begin{aligned} (b^2 + 1)a^2 - (10b)a + 4b^2 + 9 &= 0 \\ \Delta &= (10b)^2 - 4(b^2 + 1)(4b^2 + 9) \\ &= -16b^4 + 48b^2 - 36 \\ &= -16(b^2 - \frac{3}{2})^2 \geq 0 \\ b^2 &= \frac{3}{2} \\ a &= \frac{5b}{b^2 + 1} = 2b \\ b(a + \frac{1}{a}) &= 2b^2 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

例1.6

已知 $a, b \in Q, a^5 + b^5 = 2a^2b^2$,求证: $1 - ab$ 是有理数的平方.

考虑常量代换:

$$\begin{aligned} 1 - ab &= (\frac{a^5 + b^5}{2a^2b^2})^2 - ab \\ &= \frac{(a^5 + b^5)^2 - 4a^5b^5}{4a^4b^4} \\ &= \frac{(a^5 - b^5)^2}{4a^4b^4} \\ &= (\frac{a^5 - b^5}{2a^2b^2})^2 \end{aligned}$$

例1.7

(2015北京大学博雅计划)整数 x, y, z 满足 $xy + yz + zx = 1$, 则 $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)$ 可能取到的值为

A. 16900 B. 17900 C. 18900 D. 前三个答案都不对

故技重施, 常量代换:

$$\begin{aligned} 1 + x^2 &= xy + yz + zx + x^2 = (x + y)(x + z) \\ 1 + y^2 &= (y + z)(y + x) \\ 1 + z^2 &= (z + x)(z + y) \\ (1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) \\ &= [(x + y)(y + z)(z + x)]^2 \end{aligned}$$

所以要求结果为完全平方数, 故排除BC. 只需要找出可行的A.

$$130 = 2 \times 5 \times 13$$

$$\text{令} \begin{cases} x + y = 2, \\ y + z = 5, \\ z + x = 13 \end{cases}, \text{解得:} \begin{cases} x = 5, \\ y = -3, \\ z = 8 \end{cases}$$

经检验, 符合条件, 故选A.

例1.8

(2017北京大学博雅计划)整数 a, b, c 满足 $a + b + c = 1, s = (a + bc)(b + ac)(c + ab) > 100$, 求 s 的最小值.

仍然常量代换构造齐次式:

$$\begin{aligned} a + bc &= a(a + b + c) + bc = (a + b)(a + c) \\ &\dots \\ s &= [(a + b)(b + c)(c + a)]^2 \geq 121 (s > 100) \end{aligned}$$

可惜, 无法构造出合理的取等条件.

同理, $s = 169, 196, 225, 256, 289$ 不可以, $s = 324 (a = -5, b = 2, c = 4)$ 可行

例1.9

(2015北京大学博雅计划) 设 $x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $y = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $z = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, 且 $x + y + z = 1$, 则 $x^{2015} + y^{2015} + z^{2015}$ 的值为?

联想到余弦定理, 条件相当于 $A + B + C = \pi$, $\cos A + \cos B + \cos C = 1$.

熟知 $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

所以有一个角的半角正弦值为0, 这个角余弦值一定为1.

不妨设 $x = 1, y = -z$, 则 $x^{2015} + y^{2015} + z^{2015} = 1$

或者考虑因式分解:

$$a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) - 2abc = 0$$

这是一个三元三次对称式, 当 $a = b + c$ 时, 左式等于0, 所以可以因式分解为:

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) = 0$$

不妨设 $a + b = c$, 则 $z = -1, x = y = 1$, 同理得到相同结论

例1.10

已知 $abc = 1$, 求 $\sum_{cyc} \frac{a}{ab+a+1}$ 的值.

$$\begin{aligned} \frac{a}{ab+a+1} &= \frac{a}{ab+a+abc} = \frac{1}{bc+b+1} \\ \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} \\ &= \frac{b+1}{bc+b+1} + \frac{bc}{abc+bc+b} = 1 \end{aligned}$$

或者, 对于 $xyz = 1$, 作代换 $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$.

$$\frac{a}{ab+a+1} = \frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{z} + \frac{x}{y} + 1} = \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$$

同理累加即可. ### 常见代换 变量代换的常见类型: 1. 连环式代换: $a, b, c = 1, a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ 2.

分蛋糕代换: $a + b + c = 1$ 求证 $a + b + c + a + c \leq \frac{1}{3}$

$$\begin{cases} a = \frac{x}{x+y+z} \\ b = \frac{y}{x+y+z} \\ c = \frac{z}{x+y+z} \end{cases}$$

证明: $x + y + z \leq \frac{1}{3} \Rightarrow x + y + z \leq \frac{1}{3} \Rightarrow x + y \leq \frac{1}{3} \Rightarrow x + y + z \leq \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 3$. 拉维代换: a, b, c 是 $\triangle ABC$ 边, $a = x + y, b = y + z, c = z + x$ 4. 差分代换: $a + b + c = 0$ 证 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$$a = x - y, \quad b = y - z, \quad c = z - x$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

例1.11 (2018北京大学自主招生) 已知 $a \neq b, a^2(b + c) = b^2(a + c) = 1$, 求 $c^2(a + b) - abc$ 的值.

$$\begin{aligned} ab(a - b) + c(a^2 - b^2) &= 0 \\ ab + c(a + b) &= 0 \\ c^2(a + b) &= -abc \end{aligned}$$

利用 $a^2(b + c) = 1$:

$$\begin{aligned} a(ab + ac) &= 1 = -abc \\ c^2(a + b) - abc &= -2abc = 2 \end{aligned}$$

例1.12

(2014北大综合营) 设实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0, a^3 + b^3 + c^3 = 0$, 其中 $n \in N_+$, 求 $a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}$ 的值

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc + \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] = 3abc = 0, \text{ 所以:}$$

$abc = 0$, 不妨设 $c = 0, a + b = 0$, 则所求式显然等于 0.

例1.13

(2016北大自招) 已知对于实数 a , 存在实数 b, c 满足 $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc, a^2 = 2(b + c)$, 则这样的实数 a 的个数为()

A. 1 B. 3 C. 无穷个 D. 前三个选项都不对

由※有 $a - b - c = 0$ 或 $a = -b = -c$, 下面对两个情况进行分类讨论:

情况一: $a=b+c$

$a^2 = 2a$, 于是 a 可以为 0 或 2

情况二: $b=c=-a$

$a^2 = -4a \geq 0$, 于是 $a = -4$

综上, 选 B

例 1.14

(自主招生) 已知 $a + b + c = 0$, 求 $a(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}) + b(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}) + c(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$

原式相当于:

$$\frac{a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)}{abc} = -\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = -3$$

例题 1.15

设 a, b, c 为非零常数, 且 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$,

$$a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = -3$$

则 $a + b + c$ 的可能值有

- A. 3 个
- B. 2 个
- C. 1 个
- D. 前三个答案都不对

条件像是例 1.14 的反问题.

$$\frac{a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)}{abc} = -3$$

也就是 $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc = 0$

类似例 1.9, 可以因式分解:

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) = 0$$

Scenario One

$$a + b + c = 0$$

Scenario Two

$$-\frac{1}{3}(a + b + c)^2 \leq ab + bc + ca = 0 \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2, \text{ 则} \\ (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 1$$

当 a, b, c 变为相反数时, 条件仍满足, 故:

$a + b + c = \pm 1$ 故选 A ### 一个常用结论 设实数 S, Q 满足

$$S^2 \leq nQ$$

则一定存在 n 个实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 使得

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = S, \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = Q.$$

反过来, 若这样的 n 个实数存在, 由柯西不等式:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2),$$

自然有 $S^2 \leq nQ$ 。下面证明充分性。这个结论可以用数学归纳法解决。当 $n = 2$ 时, 设

$$x + y = S, \quad x^2 + y^2 = Q.$$

于是

$$xy = \frac{S^2 - Q}{2}.$$

所以 x, y 是方程

$$t^2 - St + \frac{S^2 - Q}{2} = 0$$

的两个根。其判别式为

$$\Delta = S^2 - 2(S^2 - Q) = 2Q - S^2.$$

只要 $S^2 \leq 2Q$, 就有 $\Delta \geq 0$, 故 x, y 为实数。假设结论对 $n - 1$ 个实数成立。现在考虑 n 个实数的情形。先设最后一个数为 $x_n = z$ 。那么剩余的 $n - 1$ 个数需要满足

$$x_1 + \cdots + x_{n-1} = S - z,$$

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = Q - z^2.$$

根据归纳假设, 只需要保证

$$(S - z)^2 \leq (n - 1)(Q - z^2).$$

整理得

$$nz^2 - 2Sz + S^2 - (n - 1)Q \leq 0.$$

把它看作关于 z 的二次不等式, 其判别式为

$$\begin{aligned} \Delta &= (-2S)^2 - 4n[S^2 - (n - 1)Q] \\ &= 4(n - 1)(nQ - S^2) \geq 0. \end{aligned}$$

因此总能找到实数 z , 使上式成立(事实上, $z = \frac{S}{n}$ 是可行的)。此时剩下的 $n - 1$ 个数满足归纳条件, 故存在。

综上,

$$S^2 \leq nQ$$

不仅是柯西不等式给出的必要条件, 也是存在实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的充分条件。

特别地, $n = 3$ 时只需先取一个 c , 将问题化为 $a + b$ 与 $a^2 + b^2$ 的二元问题; 而二元问题最终就是判别式非负。