

2027 届湖南九校联盟 9 月联考：函数与导数

整理 2027 届湖南九校联盟 9 月联考 T19，题目涉及导数定义的集合、集合相等条件与参数不等式。

2026年10月2日 · 数学 · 函数与导数 · 联考试题

2027 届湖南九校联盟 9 月联考

T19

函数

$$f(x) = x \ln x - x - \frac{1}{2x},$$

对任意 $t > 0$ ，记

$$A_t = \{x \mid f'(x) \geq f'(t)\}.$$

- (1) 求集合 A_1 ;
- (2) 若 $0 < u < 1 < v$ ，且 $A_u = A_v$:
 - (i) 证明: $uv > 1$;
 - (ii) 当 $v \geq eu$ 时，求实数 λ 的最大值，使得不等式

$$uv \geq 1 + \lambda \left(\ln \frac{v}{u} \right)^2$$

恒成立。

(I) 探查 $f'(x)$ 的单调性:

$$f'(x) = \ln x + 1 - 1 + \frac{1}{2x^2} = \ln x + \frac{1}{2x^2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} = \frac{x^2 - 1}{x^3}$$

函数定义域: $(0, +\infty)$

因此有:

$$x \in (0, 1), f'(x) \downarrow$$

$$x \in (1, +\infty), f'(x) \uparrow$$

故而:

$$f'(x) \geq f'(1)$$

即 $A_1 = (0, +\infty)$

(II)

(i)

$$A_u = A_v$$

要求不等式

$$f'(x) \geq f'(u)$$

和不等式

$$f'(x) \geq f'(v)$$

同解.

这等价于 $f'(u) = f'(v)$, 则问题转化为**极值点偏移**.

$$uv > 1$$

$$\iff u > \frac{1}{v}$$

$$u, \frac{1}{v} \in (0, 1)$$

$$(0, 1), f'(x) \downarrow$$

$$u > \frac{1}{v}$$

$$\iff f'(u) = f'(v) < f'\left(\frac{1}{v}\right)$$

构造函数 $F(x) = f'(x) - f'(\frac{1}{x}), x > 1$

$$\begin{aligned} F'(x) &= f''(x) + \frac{1}{x^2} f''(\frac{1}{x}) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} (x - x^3) \\ &= \frac{-x^4 + 2x^2 - 1}{x^3} = \frac{-(x^2 - 1)^2}{x^3} < 0 \end{aligned}$$

因此有:

$$\begin{aligned} v &\in (0, 1) \\ F(v) &< F(1) = 0 \\ f'(v) - f'(\frac{1}{v}) &< 0 \end{aligned}$$

(ii)

题目条件有极强的指向性: **比值换元**

- 对于对数函数, 可以将差转化为商
- 给出 $\frac{v}{u} \geq e, \ln \frac{v}{u}$

那么, 我们可以换元 $t = \frac{v}{u} \geq e$, 将 u, v 都写成关于 t 的代数式, 从而消元:

$$\begin{aligned} f'(u) &= f'(v) \\ \ln u + \frac{1}{2u^2} &= \ln v + \frac{1}{2v^2} \\ \frac{1}{2u^2} &= \ln t + \frac{1}{2t^2 u^2} \\ u &= \sqrt{\frac{t^2 - 1}{2t^2 \ln t}} \\ v = ut &= \sqrt{\frac{t^2 - 1}{2 \ln t}} \end{aligned}$$

分离参数

$$\begin{aligned}\lambda &\leq \frac{uv-1}{(\ln t)^2} \\&= \frac{\frac{t^2-1}{2t\ln t}-1}{(\ln t)^2} \\&= \frac{t^2-1-2t\ln t}{2t(\ln t)^3}\end{aligned}$$

问题转化为求 $\inf \frac{t^2-1-2t\ln t}{2t(\ln t)^3}$:

换元 $\ln t = u \geq 1$

$$\begin{aligned}
& \frac{t^2 - 1 - 2t \ln t}{2t(\ln t)^3} \\
&= \frac{e^{2u} - 1 - 2e^u u}{2e^u u^3} \\
&= \frac{e^u - e^{-u} - 2u}{2u^3} \\
g(x) &= \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3}, x \geq 1 \\
g'(x) &= \frac{(e^x + e^{-x} - 2)(x^3) - (e^x - e^{-x} - 2x)(3x^2)}{x^6} \\
&= \frac{x(e^x + e^{-x} - 2) - 3(e^x - e^{-x} - 2x)}{x^4} \\
&= \frac{(x-3)e^x + (x+3)e^{-x} + 4x}{x^4} \\
h(x) &= (x-3)e^x + (x+3)e^{-x} + 4x \\
h'(x) &= (x-2)e^x - (x+2)e^{-x} + 4 \\
h''(x) &= (x-1)e^x + (x+1)e^{-x} \geq 0 \\
h'(x) &\geq h'(1) > h'(0) = 0 \\
h(x) &\geq h(1) > h(0) = 0 \\
g'(x) &> 0 \\
g(x) &\geq g(1) = e - \frac{1}{e} - 2 \\
\lambda &\leq \frac{1}{2}g(1) = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e} - 2\right)
\end{aligned}$$

补充解法 (GPT-6)

(i) 由 $A_u = A_v$, 且 $u \in A_u$ 、 $v \in A_v$, 可得

$$f'(u) \geq f'(v), \quad f'(v) \geq f'(u),$$

所以 $f'(u) = f'(v)$ 。令 $a = \ln v > 0$, 则

$$\begin{aligned} f'(v) - f'\left(\frac{1}{v}\right) &= 2a - \frac{v^2 - v^{-2}}{2} \\ &= 2a - \sinh(2a) < 0 \end{aligned}$$

这里用了 $\sinh y > y$ ($y > 0$)。于是 $f'(u) = f'(v) < f'(1/v)$ 。由于 $u, 1/v \in (0, 1)$ ，而 f' 在 $(0, 1)$ 上严格递减，故 $u > 1/v$ ，即 $uv > 1$ 。

(ii) 令

$$s = \ln \frac{v}{u} \geq 1, \quad v = ue^s$$

由 $f'(u) = f'(v)$ ，有

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2u^2} - \frac{1}{2v^2} \\ &= \frac{1 - e^{-2s}}{2u^2}, \quad u^2 = \frac{1 - e^{-2s}}{2s} \end{aligned}$$

因此

$$uv = e^s u^2 = \frac{e^s - e^{-s}}{2s} = \frac{\sinh s}{s}$$

每个 $s \geq 1$ 都可取到：按上式取正数 u 并令 $v = ue^s$ ，则 $u^2 < 1/(2s) \leq 1/2$ ，而

$$v^2 = \frac{e^{2s} - 1}{2s} > 1$$

(因为 $e^{2s} > 1 + 2s$)。所以 $0 < u < 1 < v$ 、 $v \geq eu$ ，且构造保证 $f'(u) = f'(v)$ ，即 $A_u = A_v$ 。

原不等式等价于

$$\lambda \leq \frac{uv - 1}{s^2} = \frac{\sinh s - s}{s^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^{2k-2}}{(2k+1)!}$$

这里用到双曲正弦的泰勒展开。双曲正弦、正弦以及相应的偶函数展开分别为

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\end{aligned}$$

这些展开对所有实数 x 都收敛。双曲函数的展开可由 e^x 与 e^{-x} 的泰勒级数相加、相减得到；与普通三角函数相比，双曲函数的对应项没有交错的正负号。

因此，上式进一步写成

$$\frac{\sinh s - s}{s^3} = \frac{1}{3!} + \frac{s^2}{5!} + \frac{s^4}{7!} + \cdots$$

当 $s \geq 1$ 时，各项均不减，且 $s^2/5!$ 严格递增，所以整个级数严格递增。

最小值因此在 $s = 1$ 处取得，故

$$\lambda_{\max} = \sinh 1 - 1 = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} - 2 \right)$$

由于 $s = 1$ 可取到，这个上界确为最大值。