

高三开学考好题大串讲：题目整理

整理《高三开学考好题大串讲》视频中安徽A10联盟、青桐鸣联考、杭二开学考、深圳中学、浙江Z20的9道数学题题目（不含解答）。

2026年9月30日 · 数学 · 高三 · 开学考 · 题目整理

来源：《高三开学考好题大串讲》（一数）。仅收录题目，不含解答。

2027届安徽A10联盟

第6题

若函数 $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - ax$ ($a \in \mathbb{Z}$) 在 $(1, 3)$ 上存在最小值 m ，则 $m = (\quad)$

A. $e - 1$ B. $e - 2$ C. $1 - e$ D. $2 - e$

先对函数求导：

$$f'(x) = \ln(x+1) + 1 - a$$

$f'(x)$ 单调递增，要求 $f(x)$ 在 $(1, 3)$ 上存在最小值 m ，即要求 $f'(x)$ 有在 $(1, 3)$ 上恰有一个有变号零点：

$$f'(x_0) = \ln(x_0 + 1) + 1 - a = 0, x_0 \in (1, 3)$$

$$a = 1 + \ln(x_0 + 1) \in (1 + \ln 2, 1 + \ln 4) \subset (1, 3)$$

$$\text{Besides, } a \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore a = 2, x_0 = e - 1$$

$$m = f(x_0) = e \ln e - 2(e - 1) = 2 - e$$

正确选项:D

第7题

已知各项均不相同的数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}$, 则 $\sum_{i=1}^{2027} \frac{a_i a_{i+1}}{a_1 a_{2028}} = ()$

A. 2027 B. 2028 C. 2 D. 1

首先明确方向：不太可能求出 a_n 的通项公式，因为数列的初值没有给出。

我们对递推公式进行变形：

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+2}} &= \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \\ \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} &= k (n = 1, 2, 3, \dots, 2027) \\ \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n a_{n+1}} &= k \\ a_n a_{n+1} &= \frac{1}{k} (a_{n+1} - a_n) \\ \sum_{i=1}^{2027} \frac{a_i a_{i+1}}{a_1 a_{2028}} &= \frac{1}{a_1 a_{2028}} \sum_{i=1}^{2027} a_i a_{i+1} \\ &= \frac{1}{a_1 a_{2028}} \sum_{i=1}^{2027} \frac{1}{k} (a_{i+1} - a_i) \\ &= \frac{1}{a_1 a_{2028}} \cdot \frac{1}{k} (a_{2028} - a_1) \\ &= \frac{a_{2028} - a_1}{a_1 a_{2028}} \cdot \frac{1}{k} \\ &= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{2028}} \right) \frac{1}{k} \\ &= \left[\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{a_{2027}} - \frac{1}{a_{2028}} \right) \right] \frac{1}{k} \\ &= 2027k \cdot \frac{1}{k} = 2027 \end{aligned}$$

正确答案:A

可以更快的得到答案:

忽略各项均不相同的条件, 令 $a_n = 1 (n = 1, 2, 3, \dots, 2028)$, 可以快速得到答案.

第 17 题 (15 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\cos 2A + \cos 2B + 2 = 4 \cos^2 C$.

(1) 求 $\frac{c^2}{a^2 + b^2}$ 的值;

(2) 若 $c \sin A = 2b \sin 1500^\circ$, 且 $a = 6$, 求 $\triangle ABC$ 的外接圆面积.

(1) 考虑到要计算边的比例, 考虑用含正弦的二倍角公式:

$$4 - 2(\sin^2 A + \sin^2 B) = 4(1 - \sin^2 C)$$

$$4 \sin^2 C = 2(\sin^2 A + \sin^2 B)$$

$$\frac{c^2}{a^2 + b^2} = \frac{\sin^2 C}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}$$

(2) 注意到主题干条件和(1)互为等价条件, (1)中条件的形式更好.

$$c \sin A = 2b \sin 60^\circ = \sqrt{3}b$$

$$a = 6$$

$$a^2 + b^2 = 2c^2$$

三个条件中有两个是边的条件, 故考虑用余弦定理:

$$c^2(1 - \cos^2 A) = 3b^2$$

$$c^2[1 - (\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc})^2] = 3b^2$$

$$c^2[1 - (\frac{2b^2 - c^2}{2bc})^2] = 3b^2$$

考虑到等式的齐次性, 结合 $\frac{b}{c} = \frac{\sin A}{\sqrt{3}}$:

$$1 - \left[\frac{2 \cdot \left(\frac{\sin A}{\sqrt{3}} \right)^2 - 1}{2 \cdot \frac{\sin A}{\sqrt{3}}} \right]^2 = 3 \left(\frac{\sin A}{\sqrt{3}} \right)^2$$

$$1 - \sin^2 A = \left[\frac{2 \cdot \left(\frac{\sin A}{\sqrt{3}} \right)^2 - 1}{2 \cdot \frac{\sin A}{\sqrt{3}}} \right]^2$$

$$\cos^2 A = \left[\frac{2 \cdot \left(\frac{\sin A}{\sqrt{3}} \right)^2 - 1}{2 \cdot \frac{\sin A}{\sqrt{3}}} \right]^2$$

$$\cos A = \pm \frac{2 \cdot \left(\frac{\sin A}{\sqrt{3}} \right)^2 - 1}{2 \cdot \frac{\sin A}{\sqrt{3}}}$$

下面进行分类讨论:

$$\cos A = \frac{2 \cdot \left(\frac{\sin A}{\sqrt{3}} \right)^2 - 1}{2 \cdot \frac{\sin A}{\sqrt{3}}}$$

$$\frac{2 \sin A \cos A}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \sin^2 A - 1$$

$$\frac{\sin 2A}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \frac{1 - \cos 2A}{2} - 1$$

$$\frac{\sin 2A}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \cos 2A = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \sin \left(2A + \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{2}{3}$$

$$2A + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6} \right)$$

$$2A + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

$$A = \frac{2\pi}{3}$$

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{6}{2 \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$$

$$\cos A = -\frac{2 \cdot \left(\frac{\sin A}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1}{2 \cdot \frac{\sin A}{\sqrt{3}}}$$

$$\frac{2 \sin A \cos A}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3} \sin^2 A + 1$$

$$\frac{\sin 2A}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3} \frac{1 - \cos 2A}{2} + 1$$

$$\frac{\sin 2A}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \cos 2A = +\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) = +\frac{2}{3}$$

$$2A - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$$

$$2A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$A = \frac{\pi}{3}$$

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{6}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$$

以上两个过程，看似殊途同归，实则有一个致命的错误：平方增根：

对于 $A = \frac{\pi}{3}$ ，下面用两种方法计算 b ：

$$\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{\sin A} = 2$$

$$a^2 + b^2 = 2c^2$$

$$a^2 + b^2 = 8b^2$$

$$b^2 = \frac{36}{7}$$

余弦定理又给出：

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc$$

$$36 = 3b^2$$

$$b^2 = 12$$

这导致出现矛盾.

增根产生的原因

原条件实际上等价于下面两个方程同时成立：

$$\textcircled{1} \sin A = \sqrt{3} \frac{b}{c}, \quad \textcircled{2} \cos A = \frac{2b^2 - c^2}{2bc} \quad (\text{由余弦定理和 } a^2 = 2c^2 - b^2 \text{ 得到})$$

上述做法是把 ② 平方，再和 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 合并，得到

$$\cos^2 A = \left(\frac{2b^2 - c^2}{2bc} \right)^2.$$

这一步丢掉了 $\cos A$ 的符号信息。之后再开方写成“±”时，负号分支 $\cos A = -\frac{2b^2 - c^2}{2bc}$ 并不是原来的条件 ②，而是一个新加进来的方程。

从几何上看：

- 你又用 $\frac{b}{c} = \frac{\sin A}{\sqrt{3}}$ 把 b, c 换成了 $\sin A$ ，所以整个方程只依赖于 $\sin A$ 和 $\cos^2 A$ 。
- 这两个量在 $A \rightarrow \pi - A$ 时都不变，因此方程的解必然成对出现：若 A 是解， $\pi - A$ 也是解。
- 负号分支正好对应补角。 $\frac{\pi}{3}$ 与 $\frac{2\pi}{3}$ 互补，其中只有一个能满足 ② 中 $\cos A$ 的真实符号。

另外， $A = \frac{\pi}{3}$ 时算出的 $R = \frac{6}{2 \sin \frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3}$ 与正确答案恰好相同，因为互补角的正弦相等。所以这次答案碰巧没受影响，但这个角本身不成立。

避免增根的写法

方法1

设 $t = \frac{b}{c}$ 。保留 ② 的原样，只用平方关系来求 t ：

$$\sin A = \sqrt{3}t, \quad \cos A = \frac{2t^2 - 1}{2t}$$

由 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 得

$$3t^2 + \frac{(2t^2 - 1)^2}{4t^2} = 1 \implies 16t^4 - 8t^2 + 1 = 0 \implies (4t^2 - 1)^2 = 0$$

所以 $t = \frac{1}{2}$ 。再代回 ②，由它直接确定符号：

$$\cos A = \frac{2 \cdot \frac{1}{4} - 1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

因此 $A = \frac{2\pi}{3}$ ，外接圆半径 $R = 2\sqrt{3}$ ，外接圆面积为 $S = \pi R^2 = 12\pi$ 。

方法2

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin A}{\sqrt{3}}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$2c^2 - b^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$2b^2 - c^2 - 2bc \cos A = 0$$

$$2\left(\frac{\sin A}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 - 2\left(\frac{\sin A}{\sqrt{3}}\right) \cos A = 0$$

这将回到前面分类讨论的情况一，得到 $A = \frac{2\pi}{3}$

回顾此题，可知选择大于努力：

- 条件的考虑顺序：

$$c \sin A = 2b \sin 60^\circ = \sqrt{3}b$$

$$a = 6$$

$$a^2 + b^2 = 2c^2$$

在上述三个条件中，我们优先考虑了条件1和3，因为它们可以确定三角形的形状，并且还有**齐次化**的好处

如果过早考虑条件2，就会得到难以求解的代数关系

- 条件的利用方法：

盲目对已知条件平方，会导致出现增根

对根的检验，不是长久之计，应该写出约束更强的等价变形

2027届河南、河北、山西、陕西青桐鸣9月联考

第17题（15分）

已知 $n \in \mathbf{N}^*$ ，数列 $\{a_n\}$ 的首项为 0， $a_{n+1} - (n+1)a_n = n$.（提示：
 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$ ）

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 $b_n = \frac{1}{a_n + 1}$ ，设函数 $f(x) = 1 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$. 证明：

(i) 当 $x > 0$ 时， $f'(x) < f(x)$;

(ii) $b_1 + b_2 + \cdots + b_n < e - 1$.

(1)

计算前4项：

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 5, a_4 = 23$$

我们猜测， $a_n = n! - 1$

凑出 $a_n + 1$ 的阶乘形式：

$$n \geq 1,$$

$$(a_{n+1} + 1) - (n + 1)(a_n + 1) = 0$$

$$(a_{n+1} + 1) = (n + 1)(a_n + 1)$$

$$= (n + 1)n(a_{n-1} + 1)$$

$$= (n + 1)n(n - 1) \cdots 2(a_1 + 1)$$

$$= (n + 1)!$$

$$a_{n+1} = (n + 1)! - 1, n \geq 1$$

$$\text{In particular, } a_1 = 1! - 1$$

$$\therefore a_n = n! - 1$$

(2)

(i)

$$b_n = \frac{1}{n!}$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

不难发现，此题的命题背景是 $y = e^x$ 的泰勒展开

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} < f(x)$$

(ii)

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = f(1) - 1$$

其实就是要证明 $f(x) < e^x$

这一点从泰勒展开的角度是显然的，可惜不能如此书写：

考虑到(i)中证明了 $f'(x) - f(x) < 0$, 构造函数:

$$H(x) = \frac{f(x)}{e^x}$$

$$H'(x) = [f'(x) - f(x)]e^{-x} < 0$$

$$\frac{f(1)}{e} = H(1) < H(0) = 1$$

$$f(1) < e$$

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = f(1) - 1 < e - 1$$

2027届浙江杭州二中9月开学考

第7题

已知函数 $f(x) = x^3 + ax$ ，若 $f(e^x) \geq f(-e^{-x})$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为 ()

A. $a \leq 0$ B. $a \geq 0$ C. $a \leq -1$ D. $a \geq -1$

初步打量，看似是对函数单调性的讨论，但实际上由于自变量并不自由，所以 $f(x)$ 单调递增是题目条件的充分不必要条件：

$$\text{let } f'(x) = 3x^2 + a \geq 0, a \geq 0$$

$$e^x > 0 > -e^{-x}$$

$$f(e^x) > f(-e^{-x})$$

那么， $a \geq 0$ 一定满足条件. 答案很有可能是 $a \geq -1$.

或者考虑带入函数解析式：

$$[(e^x)^3 + (e^{-x})^3] + (e^x + e^{-x})a \geq 0$$

$$[(e^x)^2 - 1 + (e^{-x})^2] + a \geq 0$$

$$\text{LHS} \geq a + 1 \geq 0$$

$$a \geq -1$$

正确答案:D

2027届广东深圳中学9月开学考

第7题

已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) + f(x-y) = \frac{2}{3}f(x)f(y)$, $f(1) = \frac{3}{2}$, 则下列结论不正确的是

A. $f(0) = 3$

B. 函数 $f(2x-1)$ 关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称

C. $f(x) + f(0) \geq 0$

D. 3 是函数 $f(x)$ 的周期

题目条件类似于余弦积化和差:

$$\text{let } f(x) = t \cos \omega x$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = \frac{2t}{3} \cos(x) \cos(y)$$

$$\frac{2t}{3} = 2, t = 3$$

$$f(1) = 3 \cos \omega = \frac{3}{2}, \omega = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$f(0) = 3$$

$$f[2(1-x)-1] = f(-2x+1) = f(2x-1)$$

$$f(x) + f(0) = 3 + f(x) \geq 0$$

$$\text{let } f(x) = 3 \cos \frac{\pi}{3}x, T_{\min} = 6$$

因此, 通过特殊情况, 我们得知正确答案为D

下面, 我们进行严谨证明:

令 $x = 1, y = 0$, 则:

$$2f(1) = f(0) = 3$$

令 $x = 0$, 则:

$$f(y) + f(-y) = 2f(y)$$

$$f(y) = f(-y), y \in \mathbb{R}$$

这表明 $f(x)$ 有对称轴 $x = 0$, 与选项B等价

令 $x = y$, 则:

$$f(2x) + f(0) = \frac{2}{3}[f(x)]^2 \geq 0$$

$$2x \rightarrow x, f(x) + f(0) = \frac{2}{3}[f(\frac{x}{2})]^2 \geq 0$$

令 $y = 1$, 则:

$$f(x+1) + f(x-1) = f(x)$$

$$f(x+2) + f(x) = f(x+1)$$

$$f(x+2) + f(x-1) = 0$$

$$f(x+5) + f(x+2) = 0$$

$$f(x-1) = f(x+5)$$

$$T = 6$$

对于周期 $T = 3$, 可以利用余弦函数构造反例, 同上.

第8题

将 1, 2, 3, 4, 5, 6 随机排成一行, 前三个数字构成三位数 a , 后三个数字构成三位数 b , 则 $|a - b| > 100$ 的概率为

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

我们不妨对随机排列的结果进行排序, 令 $a > b$, $|a - b| = a - b$.

我们对三位数的百位进行分类:

(i) 百位相差不小于2

这种情况一定满足 $a - b > 100$

$$\text{概率: } P_1 = \frac{4+3+2+1}{C_6^2} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

到这里，基本可以锁定正确答案为D

(ii) 百位相差1

如果有 $a - b > 100$, 必然要求 a 的十位数大于 b 的十位数。

已经选取了百位的2个数字，还剩下4个数字

$$\text{概率: } P_2 = \frac{5}{C_6^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\text{总概率: } P = P_1 + P_2 = \frac{5}{6}$$

反思：如果考虑反面 $a - b \leq 100$, 更加简单

第 11 题

已知函数 $f(x) = 3^{x+1} + ax^3$ 有三个极值点 x_1, x_2, x_3 , 若 $x_1 < x_2 < \frac{x_3}{3}$, 则

A. $x_1 x_2 < 0$

B. x_1 为极大值点

C. $x_3 - x_2 > 2$

D. $f(x_2) > 0$

$$f'(x) = (\ln 3)3^{x+1} + 3ax^2$$

$f'(x)$ 恰有三个变号零点 x_1, x_2, x_3 , 显然有 $a < 0$

$$f'(x) = 0 \iff -\frac{\ln 3}{a} = t = x^2 \cdot 3^{-x}$$

$$g(x) = x^2 \cdot 3^{-x}$$

$$g'(x) = (2x - x^2 \ln 3)3^{-x}$$

画出 $g(x)$ 图像可知, $g(x) - t = 0$ 有三个变号零点, 要求 $t \in (0, g(\frac{2}{\ln 3}))$, 有 $x_1 < 0 < x_2 < \frac{2}{\ln 3} < x_3$.

自此, 可以判断选项A正确.

$$f'(x) > 0 \iff t > g(x)$$

可见 $g(x) - t$ 和 $f'(x)$ 符号相反.

$$x \in (-\infty, x_1), g(x) - t > 0, f'(x) < 0$$

$$x \in (x_1, x_2), g(x) - t < 0, f'(x) > 0$$

因此 x_1 是极小值点，选项B错误

$$f(x_2) > f(0) = 3 > 0$$

选项D正确.

接下来处理选项C:

由 $g(x)$ 图像可知， t 越小， x_2 越小， x_3 越大.

那么，当 $x_2 = \frac{x_3}{3}$ 时，一定有唯一与之对对应的 t_0 ，使得 $t \in (0, t_0)$ 是题目条件的充要条件.

如果能证明 $t = t_0$ 时， $x_3 - x_2 \geq 2$ ，则选项C正确.

$$x_3 = 3x_2$$

$$g(x_3) = g(x_2)$$

$$(3x_2)^2 \cdot 3^{-3x_2} = (x_2)^2 \cdot 3^{-x_2}$$

$$9 = 3^{2x_2}, x_2 = 1, x_3 = 3$$

$$x_3 - x_2 = 2$$

答案正如我所料，选项C正确.

使用**齐次化**的技巧，可以更好地利用比值条件:

$$x_2^2 \cdot 3^{-x_2} = x_3^2 \cdot 3^{-x_3}$$

$$\left(\frac{x_3}{x_2}\right)^2 = 3^{x_3-x_2} > 9$$

$$x_3 - x_2 > 2$$

正确答案:ACD

2027届浙江Z20

第18题 (17分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右顶点分别为 A, B , 且 $|AB| = 4$, 离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点.

① 若 l 过点 $P(4, 1)$, 求 $|PM| \cdot |PN|$ 的最大值;

② 设直线 AM, BN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且 $k_1 = 2k_2$, 问直线 l 是否过定点? 若是, 求出该定点的坐标; 若不是, 请说明理由.

$$(1) |AB| = 2a = 4, a = 2, e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, c = 1, b = \sqrt{3}$$

$$\text{综上, } C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

(2)①

用直线的参数方程处理线段长度乘积:

$$\begin{cases} x = 4 + t \cos \theta, \\ y = 1 + t \sin \theta \end{cases}$$

$$3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$$

$$3(4 + t \cos \theta)^2 + 4(1 + t \sin \theta)^2 - 12 = 0$$

$$(3 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta)t^2 + 8(\sin \theta + 3 \cos \theta)t + 40 = 0$$

$$|PM| \cdot |PN| = t_1 t_2 = \frac{40}{3 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta} \leq \frac{40}{3}$$

②

根据对称性, 若直线 l 过定点, 则定点一定在 x 轴上.

$$x = my + t$$

$$3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$$

$$3(my + t)^2 + 4y^2 - 12 = 0$$

$$(3m^2 + 4)y^2 + 6mty + 3(t^2 - 4) = 0$$

$$\Delta > 0$$

$$k_1 = 2k_2$$

$$\frac{y_1}{x_1 + 2} = 2 \frac{y_2}{x_2 - 2}$$

$$2 = \frac{y_1(x_2 - 2)}{y_2(x_1 + 2)}$$

$$= \frac{y_1(my_2 + t - 2)}{y_2(my_1 + t + 2)}$$

$$= \frac{my_1y_2 + (t - 2)y_1}{my_1y_2 + (t + 2)y_2}$$

接下来的问题，转为处理非对称韦达定理：

这里，我们沿用**齐次化**的方法，将 y_1y_2 转化为含 $y_1 + y_2$ 的代数式：

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{6mt}{3m^2+4}, \\ y_1 y_2 = \frac{3(t^2-4)}{3m^2+4} \end{cases} \\
& \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2} = -\frac{3(t^2-4)}{6mt} \\
& my_1 y_2 = \left(-\frac{3(t^2-4)}{6t}\right)(y_1 + y_2) \\
& \frac{my_1 y_2 + (t-2)y_1}{my_1 y_2 + (t+2)y_2} \\
& = \frac{(\frac{1}{2}t + \frac{2}{t} - 2)y_1 + (-\frac{1}{2}t + \frac{2}{t})y_2}{(-\frac{1}{2}t + \frac{2}{t})y_1 + (\frac{1}{2}t + \frac{2}{t} + 2)y_2} = 2 \\
& (3t - \frac{4}{t} - 4)y_1 = (3t + \frac{4}{t} + 8)y_2 \\
& \because y_1 \neq y_2 \\
& \therefore 3t - \frac{4}{t} - 4 = 3t + \frac{4}{t} + 8 \\
& t = -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

因此，直线 l 过定点 $(-\frac{2}{3}, 0)$

总结

这9道题涵盖函数与导数、数列、三角形、概率和圆锥曲线。解题时，先从条件的结构入手，往往比直接展开计算更有效：数列递推可以转成倒数差后求和，阶乘递推可以通过配凑 $a_n + 1$ 化为标准形式，几何题则先用正弦定理、余弦定理或直线参数方程整理关系。

贯穿这些题目的一个提醒是：变形时要保留原条件中的信息。平方可能丢失符号并引入增根；函数方程推出某些性质，也不代表可以据此断定函数必为熟悉的初等函数。最后把候选结果代回关键条件，确认其确实成立，才能让计算得到的结论与原题等价。