

函数的综合运用I

从双曲三角函数出发，借助欧拉公式推导恒等式与反函数，并结合激活函数、函数最值及强基题目讲解函数综合问题的构造与放缩方法。

2026年8月7日 · 强基计划 · 数学竞赛 · 函数

双曲三角函数

引子

(2025 八省联考) 10、在人工神经网络中，单个神经元输入与输出的函数关系可以称之为激励函数。双曲正切函数是一种激励函数，定义双曲正弦函数 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ，双曲余弦函数 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ，双曲正切函数 $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ ，则

A. 双曲正弦函数是增函数

B. 双曲余弦函数是增函数

C. 双曲正切函数是增函数

D. $\tanh(x + y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \cdot \tanh y}$

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\end{aligned}$$

以上三组函数,是常见的**双曲三角函数**.

顾名思义,双曲三角函数必然与三角函数有瓜葛,而维系三角函数与双曲三角函数之间关系的纽带,就是著名的**欧拉公式**:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta (\theta \in \mathbb{R})$$

带入双曲三角函数中:

$$\sinh(ix) = i \sin x$$

$$\cosh(ix) = \cos x$$

$$\tanh(ix) = i \tan x$$

我们作代换 $x \rightarrow \frac{x}{i}$, 则:

$$\sinh(x) = i \sin \frac{x}{i}$$

$$\cosh(x) = \cos \frac{x}{i}$$

$$\tanh(x) = i \tan \frac{x}{i}$$

代换看似平平无奇,但实则地动山摇:这样一来,诸多的三角恒等变换公式便可为我所用

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= i \sin \frac{x+y}{i} \\ &= (i \sin \frac{x}{i}) \cos \frac{y}{i} + \cos \frac{x}{i} (i \sin \frac{y}{i}) \\ &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\ \cosh(x+y) &= \cos \frac{x+y}{i} \\ &= \cos \frac{x}{i} \cos \frac{y}{i} - \sin \frac{x}{i} \sin \frac{y}{i} \\ &= \cos \frac{x}{i} \cos \frac{y}{i} + (i \sin \frac{x}{i})(i \sin \frac{y}{i}) \\ &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \tanh(x+y) &= i \tan \frac{x+y}{i} \\ &= i \frac{\tan \frac{x}{i} + \tan \frac{y}{i}}{1 - \tan \frac{x}{i} \tan \frac{y}{i}} \\ &= \frac{i \tan \frac{x}{i} + i \tan \frac{y}{i}}{1 + (i \tan \frac{x}{i})(i \tan \frac{y}{i})} \\ &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} \end{aligned}$$

倘若用指数形式证明诸多的双曲三角函数恒等式,实为舍近求远."它山之石,可以攻玉",看看眼前已有的三角恒等变换公式,并将其作为有效的"他山之石",才是更简便的方法.

续

【例 4】 (2026.1 北京市西城区高三期末试卷第 10 题, 4 分)

激活函数在神经网络中的核心作用是引入非线性变换,使神经网络能够学习和逼近复杂函数关系,从而解决线性模型无法处理的非线性问题. 其中, $Tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 就是一个常见的激活函数,它可以将输入的实数输出到区间 $(-1, 1)$ 上. 若希望输出的值增加 0.5, 即 $Tanh(x_2) - Tanh(x_1) = 0.5$, 则与 $x_2 - x_1$ 的最小值最接近的是 ()

(参考数据: $\ln 2 \approx 0.69, \ln 3 \approx 1.10, \ln 5 \approx 1.61$)

- A. 0.26
- B. 0.41
- C. 0.51**
- D. 1.10

了解了双曲三角函数基本运算,更加深入定量的讨论必不可少.

直观上看,双曲正切函数在 $x \rightarrow 0$ 时增长速度快,所以 $x_1 + x_2 = 0$, 即点 $(x_1, \tanh x_1), (x_2, \tanh x_2)$ 关于原点对称时, $x_2 - x_1$ 取得最小值.

但结合图像总归只是权宜之计,不能给出严谨的解法:

问题的关键点在于利用 $\tanh x_2 - \tanh x_1 = \frac{1}{2}$. 事实上,正是在 $\tanh(x_2 - x_1)$ 中才会出现这一项. 于是,我们便构建了条件与结论间的桥梁:

$$\begin{aligned}\tanh(x_2 - x_1) &= \frac{\tanh x_2 - \tanh x_1}{1 + \tanh x_2(-\tanh x_1)} \\ &\geq \frac{\tanh x_2 - \tanh x_1}{1 + \frac{(\tanh x_2 - \tanh x_1)^2}{4}} \\ &= \frac{8}{17}\end{aligned}$$

熟知 $y = \tanh(x)$ 的反函数为 $y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, 因此有:

$$x_2 - x_1 \geq \ln \frac{5}{3} \approx 0.51$$

Prove that if $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$ then $x + y = 0$

Asked 11 years, 6 months ago Modified 9 years, 6 months ago Viewed 3k times

这是一道11年前的老题,而如今许多模拟题仍在昭示着它的价值:

从本质上讲,说的是双曲余弦正弦函数的中心对称性:

从双曲函数的指数形式,可以推得其反函数:

$$\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

注意, $\cosh(x)$ 在定义域上不单调, 不存在反函数.

对于这道题, 我们有:

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2 + 1} &> 0, y + \sqrt{y^2 + 1} > 0 \\ \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) &= 0 \\ \sinh^{-1} x + \sinh^{-1} y &= 0 \\ \sinh^{-1} x = -\sinh^{-1} y &= \sinh^{-1}(-y) \\ \implies x &= -y \end{aligned}$$

大胆猜测, 小心放缩

【附加题 2】(2026.6.29 北大强基)

已知实数 a, b, c 的绝对值均 **不小于** 1, 且 $f(x) = x + \frac{1}{x}$. 若 $f(a) + f(b) + f(c) = 0$, 求 $a + b + c$ 的最小值.

首先做出大方向的判断: a, b, c 绝无可能符号相同, 于是只剩下 "两正一负" 和 "两负一正" 两种情况:

两正一负

法1

想要 $\min a + b + c$, 那么两个正数要尽可能小, 于是令其等于 1.

不妨设 $a, b > 0, c < 0$, 有:

$$\begin{aligned}
0 &= a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 1 + (a + b - 1) + c + \frac{1}{1} + \frac{1}{a + b - 1} + \frac{1}{c} \\
c + \frac{1}{c} &\geq -[(a + b + 1) + \frac{1}{a + b - 1}] \\
c &\geq \frac{-[(a + b + 1) + \frac{1}{a + b - 1}] - \sqrt{[(a + b + 1) + \frac{1}{a + b - 1}]^2 - 4}}{2} \\
a + b + c &\geq \frac{(a + b - 1) - \frac{1}{a + b - 1} - \sqrt{[(a + b + 1) + \frac{1}{a + b - 1}]^2 - 4}}{2} \\
f(x) &= x - \frac{1}{x} - \sqrt{(x + \frac{1}{x} + 2)^2 - 4}, x \geq 1 \\
f'(x) &= 1 + \frac{1}{x^2} - 2(x + \frac{1}{x} + 2)(1 - \frac{1}{x^2}) \frac{1}{2\sqrt{(x + \frac{1}{x} + 2)^2 - 4}} \\
&= 1 + \frac{1}{x^2} - (1 - \frac{1}{x^2}) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{(x + \frac{1}{x} + 2)^2}}} \geq 0 \\
\iff (1 + \frac{1}{x^2}) &\geq (1 - \frac{1}{x^2}) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{(x + \frac{1}{x} + 2)^2}}} \\
\iff \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} &\geq \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{(x + \frac{1}{x} + 2)^2}}} \\
\iff 1 + \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} &\geq \frac{(x + \frac{1}{x} + 2)}{\sqrt{(x + \frac{1}{x} + 2)^2 - 4}} = \sqrt{1 + \frac{4}{(x + \frac{1}{x} + 2)^2 - 4}} \\
\iff 1 + \frac{4}{x^2 - 1} + \frac{4}{(x^2 - 1)^2} &\geq 1 + \frac{4}{(x + \frac{1}{x} + 2)^2 - 4} \\
\iff (x + 1)^4 &\geq (x^2 + 1)^2 \\
\iff (x + 1)^2 &\geq x^2 + 1 \\
a + b + c = f(a + b - 1)/2 &\geq f(1)/2 = 1 + 1 + (-2 - \sqrt{3}) = -\sqrt{3}
\end{aligned}$$

法2

回顾法1, 事实上我们是在已经猜出边界取等条件 $a = 1$ 时进行了恒等变形。事实上, 如果从结论 $a = b = +1, c = -2 - \sqrt{3} \implies a + b + c \geq -\sqrt{3}$ 出发, 逆推顺证, 便如顺水行舟。

$$\begin{aligned}
a + b + c &\geq -\sqrt{3} \\
\iff c &\geq -(a + b + \sqrt{3}) \\
\iff c + \frac{1}{c} &\geq -(a + b + \sqrt{3} + \frac{1}{a + b + \sqrt{3}})
\end{aligned}$$

同时, 根据法1: $c + \frac{1}{c} \geq -[(a + b + 1) + \frac{1}{a + b - 1}]$, 欲证明:

$$\begin{aligned}
& -[(a+b+1) + \frac{1}{a+b-1}] \geq -(a+b+\sqrt{3} + \frac{1}{a+b+\sqrt{3}}) \\
& \Leftrightarrow (a+b+1) + \frac{1}{a+b-1} \leq a+b+\sqrt{3} + \frac{1}{a+b+\sqrt{3}} \\
& \Leftrightarrow x+1 + \frac{1}{x-1} \leq x+\sqrt{3} + \frac{1}{x+\sqrt{3}} \quad (x \geq 2) \\
& \Leftrightarrow (x-2)[(\sqrt{3}-1)x+2] \geq 0 \quad (x \geq 2)
\end{aligned}$$

两种思路对比,法1稳扎稳打,确保了恒等变形;法2反客为主,以条件为杠杆,以必要条件撬动了问题解决.

两负一正

$$\begin{aligned}
& a > 0, b < 0, c < 0, a+b+c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \\
& a + \frac{1}{a} = -(b+c) + \frac{-(b+c)}{bc} > -(b+c) + \frac{1}{-(b+c)} \\
& a \geq 1, -(b+c) \geq 2 > 0 \\
& \therefore a > -(b+c) \\
& a+b+c > 0
\end{aligned}$$

综上, $\min a+b+c = -\sqrt{3} (a=b=1, c=-2-\sqrt{3})$

事实上,如果稍微更改一下条件,也不会影响结果:

已知实数 a, b, c 的绝对值均不大于 1, 且 $f(x) = x + \frac{1}{x}$. 若 $f(a) + f(b) + f(c) = 0$, 求 $a+b+c$ 的最小值.

首先做出大方向的判断: a, b, c 绝无可能符号相同,于是只剩下"两正一负"和"两负一正"两种情况:

两正一负

想要 $\min a+b+c$, 两正一负显然不是最优的情况,我们设法说明之: 不妨设 $a, b > 0, c < 0$, 有:

$$\begin{aligned}
& a+b+c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \\
& (a+b)(1 + \frac{1}{ab}) = -(c + \frac{1}{c}) \\
& 1 + \frac{1}{ab} > 0 \\
& a+b+c > a+b > 0
\end{aligned}$$

接下来,只需要说明"两负一正"可以给出小于0的最小值即可.

两负一正

$|a|, |b|, |c| \leq 1$, 这个条件给出很强的暗示:取得最小值时,有一些数为 ± 1 . 要让 $a + b + c$ 最小,最好 $a = b = -1, c > 0$, 而这个猜出的取等条件,将成为我们放缩的方向标:

$$\begin{aligned} (-c - \frac{1}{c}) &= (a + b)(1 + \frac{1}{ab}) \geq -2(1 + \frac{1}{ab}) \\ c + \frac{1}{c} &\leq 2(1 + \frac{1}{ab}) \\ c &\geq \frac{2 + \frac{2}{ab} - \sqrt{(2 + \frac{2}{ab})^2 - 4}}{2} \\ &= \frac{4}{2 + \frac{2}{ab} + \sqrt{(2 + \frac{2}{ab})^2 - 4}} \\ &\geq 2 - \sqrt{3} (ab = 1) \end{aligned}$$

.所以, $a + b + c \geq -\sqrt{3} (a = b = -1, c = 2 - \sqrt{3})$.