

高考数学小题荟萃(I)

抓住条件与边界，善用等价转化和整体关系；紧扣取等，检验必要与充分。

2026年10月3日 · 数学 · 高考

高考数学小题荟萃(I)

2026 天津卷

T8 数列

已知 $S_{2n} - S_n = n, a_3 = 6$, 则 $a_7 + a_8 = ()$.

A. 68

B. 56

C. -3

D. -4

第一难关: 数列是否有通项?

初步打量, $S_{2n} - S_n = n$ 是一个很松的条件. 靠前的项似乎可以自由调整, 因为向后的项有无限个, 可以由 $S_{2n} = S_n + n$ 控制.

于是, 我们的目标转为, 对 n 进行恰当赋值, 凑出 $a_7 + a_8$:

$$S_8 - S_4 = 4$$

$$a_8 + a_7 + a_6 + a_5 = 4$$

$$a_6 + a_5 = S_6 - S_4$$

$$S_6 - S_3 = 3$$

$$S_3 - S_2 = a_3 = 6$$

$$S_4 - S_2 = 2$$

综合上述条件:

$$\begin{aligned} & S_6 - S_4 \\ &= (S_6 - S_3) + (S_3 - S_2) - (S_4 - S_2) = 3 + 6 - 2 = 7 \\ & a_8 + a_7 = 4 - (S_6 - S_4) = -3 \end{aligned}$$

正确答案:C

解决问题前,明确问题边界很重要:什么可以解决,什么无法解决

2026 全国I卷

T6 不等式最值

已知函数 $f(x) = \frac{x+2}{e^x+a}$ 的最大值为1,则 $a = ()$.

- A. $\frac{1}{2}$
- B. 1
- C. $\frac{3}{2}$
- D. 2

第一反应:切线不等式 $e^x \geq x + 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+2}{e^x+a} \\ &\leq \frac{x+2}{x+(a+1)} = 1 \\ &\text{let } a = 1 \end{aligned}$$

固然可以快捷得出正确答案,但存在不严谨之处:

- $x + 2 < 0$ 时, 不等式方向相反
- $a = -1$ 时, 函数定义域要求 $x \neq 0$, 切线不等式无法取等
- 如何说明 $a \neq 1$ 时, 最大值不为1

于是, fallback到常规解法:

$$f'(x) = \frac{(e^x + a) - e^x(x + 2)}{(e^x + a)^2}$$

函数 $f(x)$ 的最大值点必然出现在导函数的零点或边界，这里显然不可能是边界：

$$\text{let } f'(x_0) = 0$$

$$e^{x_0}(x_0 + 1) = a$$

$$f(x_0) = \frac{x_0 + 2}{e^{x_0}(x_0 + 2)} = e^{-x_0} = 1$$

$$x_0 = 0, a = 1$$

检验 $a = 1$ 符合条件的方法，与第一反应相同。

切线放缩补丁：

$a < 0, x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow +\infty$, 不符合条件。

$a \geq 0, f(x) = \frac{x+2}{e^x+a} \leq 1$, 即 $e^x \geq x + (2 - a)$, 且等号可以成立，必然有 $2 - a = 1$ 。

T7 等差数列

一百零八塔位于宁夏回族自治区青铜峡市，以其独特的建筑格局和深远的历史文化闻名遐迩。该塔群共有 108 座塔，依山势自上而下排列成 12 行。将第 i 行中塔的座数记为 a_i ($i = 1, 2, \dots, 12$)，其中 $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = 3$, $a_4 = a_5 = 5$ ，且 $a_6, a_7, \dots, a_{12}$ 是一个首项为 7、公差为 2 的等差数列。将 $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ 分为 6 组，每组 2 个数，使得每组的 2 个数之和可构成一个项数为 6、公差为 d ($d > 0$) 的等差数列，则 $d = ()$ 。

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

$$a_n : 1, 3, 3, 5, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$$

注意观察， $\{a_n\}$ 中的数都是奇数，因此任意两数之和都是偶数。六个组的和构成等差数列，所以 d 是正偶数。

设六组中各组两数之和从小到大排列为 $b_1, b_2, \dots, b_6$ ，则

$$4 \leq b_1 < b_6 \leq 36,$$

其中, $b_1 \geq 1 + 3 = 4$, 而 $b_6 \leq 17 + 19 = 36$ 。因此

$$5d = b_6 - b_1 \leq 36 - 4 = 32,$$

从而 $d \leq \frac{32}{5} < 8$ 。结合 d 是正偶数, 得 $d \in \{2, 4, 6\}$ 。

再利用六组数的总和为108:

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_6 = 6b_1 + 15d = 108,$$

故 $b_1 = 18 - \frac{5}{2}d$ 。逐一检查:

- 若 $d = 2$, 则 $b_1 = 13$, 这与每组两数之和都是偶数矛盾;
- 若 $d = 6$, 则 $b_1 = 3$, 这与 $b_1 \geq 4$ 矛盾;
- 因此只能 $d = 4$, 此时 $b_1 = 8$ 。

下面给出 $d = 4$ 时的一种分组:

$$3 + 5, \quad 1 + 11, \quad 3 + 13, \quad 5 + 15, \quad 7 + 17, \quad 9 + 19.$$

六组的和依次为8, 12, 16, 20, 24, 28, 恰好构成首项为8、公差为4的等差数列; 原数列中的十二个数也都恰好使用一次。

面对庞然大物, 既可“管中窥豹”, 观察部分, 探其奇偶

又可“曹冲称象”, 算其整体, 建立等量

T14 等比数列

设实数 q 满足: 存在数列 $\{a_n\}$, 使得对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 均有 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{3n} = n^2 + n$, 且 $\{a_n\}$ 中有某连续9项 $a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{k+8}$ 是公比为 q 的等比数列, 则 q 的最大值为__.

有2026天津卷T8数列为鉴, 无法求出 a_n 通项公式, 但是我们可以以三项为单位分析:

$$b_n = a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}$$

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = n^2 + n$$

由等差数列结论, $b_n = 2n$.

而在连续9项 $a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{k+8}$ 中, 必然包含 $a_{3n-2}, a_{3n-1}, a_{3n}, a_{3n+1}, a_{3n+2}, a_{3n+3}$.

这一点, 可以对 k 模3的余数进行分类讨论得到.

那么一定有:

$$\begin{aligned}
 q^3 &= \frac{b_{n+1}}{b_n} (n = 1, 2, 3, \dots) \\
 &= \frac{n+1}{n} \leq \frac{3}{2} \\
 q &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} (k=1)
 \end{aligned}$$

2025 上海卷

T8 不等式

设 $a, b > 0, a + \frac{1}{b} = 1$, 则 $b + \frac{1}{a}$ 的最小值为_?

第一反应是: $a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} \geq 2 + 2(a = b = 1)$, 但取等条件与 $a + \frac{1}{b} = 1$ 矛盾.

第二反应:

消元, 保留一个变量

$$\begin{aligned}
 a &= 1 - \frac{1}{b} > 0 \\
 b &\in (1, +\infty) \\
 b + \frac{1}{a} &= b + \frac{1}{1 - \frac{1}{b}} \\
 &= b + \frac{b}{b-1} \\
 &= b + 1 + \frac{1}{b-1} \\
 &= b - 1 + \frac{1}{b-1} + 2 \\
 &\geq 2 + 2 = 4 (b = 2, a = \frac{1}{2})
 \end{aligned}$$

先寻找稳妥的方案, 而不是最快速的方案.

消元亦有先后, 探索不同方案:

$$b = \frac{1}{1-a} > 0$$

$$a \in (0, 1)$$

$$b + \frac{1}{a} = \frac{1}{1-a} + \frac{1}{a}$$

$$\geq \frac{(1+1)^2}{(1-a)+a} = 4 \left(a = \frac{1}{2}, b = 2 \right)$$

T10 复数

已知复数 z 满足 $z^2 = (\bar{z})^2$, $|z| \leq 1$, 则 $|z - 2 - 3i|$ 的最小值是_?

设 $z = a + bi$, 则:

$$(a + bi)^2 = (a - bi)^2$$

$$(a^2 - b^2) + 2abi = (a^2 - b^2) - 2abi$$

$$\iff ab = 0$$

当 $a = 0$, $|z| = |b| \in [0, 1]$, $b \in [-1, +1]$.

$$|z - 2 - 3i|$$

$$\geq |-2 - 2i| = 2\sqrt{2}$$

当 $b = 0$, $|z| = |a| \in [0, 1]$, $a \in [-1, +1]$.

$$|z - 2 - 3i|$$

$$\geq |-1 - 3i| = \sqrt{10}$$

比较大小: $\sqrt{10} > \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

因此, 最小值为 $2\sqrt{2}$.

寻找题目最薄弱的地方(等式条件) 如果先考虑 $|z| \leq 1$, 可能误用复数的三角形式.

14 指数函数基本性质

设 $a > 0$, $s \in \mathbb{R}$. 下列各项中, 能推出 $a^s > a$ 的一项是 ()。

- A. $a > 1$, 且 $s > 0$
- B. $a > 1$, 且 $s < 0$
- C. $0 < a < 1$, 且 $s > 0$
- D. $0 < a < 1$, 且 $s < 0$

$$a^s > a^1$$

$$\iff a > 1, s > 1$$

$$\text{or } 0 < a < 1, s < 1$$

正确答案:D

与其带入选项一一检验, 不如先得到与选项形式相似的等价条件.

16 数列与解三角形

已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $a_n = 10n - 9, b_n = 2^n$. 设 $c_n = \lambda a_n + (1 - \lambda)b_n$. 若对任意 $\lambda \in [0, 1]$, 长为 a_n, b_n, c_n 的线段均能构成三角形, 则满足条件的 n 有 ().

- A. 1个
- B. 3个
- C. 4个
- D. 无数个

显然有 $\max\{a_n, b_n\} \geq c_n \geq \min\{a_n, b_n\}$

考虑三条线段能构成三角形的充要条件:

$$a_n + b_n > c_n > 0, \quad a_n + c_n > b_n > 0, \quad b_n + c_n > a_n > 0$$

因为有 $a_n, b_n > 0$, 必然 $a_n + b_n > c_n > 0$

$$a_n + c_n > b_n, \quad b_n + c_n > a_n$$

$$\iff 2 \min\{a_n, b_n\} > \max\{a_n, b_n\}$$

$$\iff \frac{a_n}{b_n} \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

列出 a_n, b_n :

$$a_n : 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81$$

$$b_n : 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$$

初步判断 $n \in \{4, 5, 6\}$, 小题可以到此为止, 正确答案:B

接下来求解不等式:

令

$$T_n = \frac{10n - 9}{2^n}.$$

当 $n \geq 2$ 时,

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{10n + 1}{2(10n - 9)} < 1,$$

所以 T_n 从 $n = 2$ 起严格递减。

逐项检查边界:

$$T_3 = \frac{21}{8} > 2, \quad \frac{1}{2} < T_4 = \frac{31}{16} < 2,$$

以及

$$\frac{1}{2} < T_6 = \frac{51}{64}, \quad T_7 = \frac{61}{128} < \frac{1}{2}.$$

由严格递减性, 满足不等式的正整数恰为

$$\boxed{n \in \{4, 5, 6\}}.$$

2025 天津卷

T6 数列

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = -n^2 + 8n$, 则 $\{|a_n|\}$ 的前 12 项和为().

A. 48

B. 112

C. 80

D. 144

由于 S_n 是无常数项的二次函数， a_n 为等差数列.

$$a_n = S_n - S_{n-1} = -(2n-1) + 8 = 9 - 2n$$

那么，讨论 a_n 的符号:

$$n \leq 4, a_n > 0$$

$$n \geq 5, a_n < 0$$

绝对值求和:

$$\begin{aligned} T_{12} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - (a_5 + a_6 + \cdots + a_{12}) \\ &= S_4 - [S_{12} - S_4] \\ &= 2S_4 - S_{12} \end{aligned}$$

分别计算:

$$\begin{aligned} S_4 &= -16 + 32 = +16 \\ S_{12} &= -144 + 96 = -48 \\ T_{12} &= 2 \cdot 16 - (-48) = 80 \end{aligned}$$

选C.

快速准确运用已知结论减少check，并且适当利用题目条件以增加效率:

- 利用前n项和公式，而不是重新计算等差数列求和
- 分拆任务为子任务

T15 含参不等式恒成立

若 $a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in [-2, 2]$, 均有 $(2a+b)x^2 + bx - a - 1 \leq 0$ 恒成立，则 $2a+b$ 的最小值为__.

第一想法:先利用必要条件，构建关于 a, b 的不等式，然后待定系数线性组合为 $2a+b$:

$$x = -2, 7a + 2b \leq 1$$

$$x = +2, 7a + 6b \leq 1$$

$$2a + b = \frac{1}{28}[5(7a + 2b) + 3(7a + 6b)] \leq \frac{2}{7}$$

很遗憾，求出了 $2a + b$ 的最大值.

第二想法:更换策略，待定自变量 x :

$$(2x^2 - 1)a + (x^2 + x)b \leq 1$$

$$2x^2 - 1 < 0, \frac{2x^2 - 1}{2} = \frac{x^2 + x}{1}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b \leq 1$$

$$2a + b \geq -4$$

初步判断，等号可以成立: 取等条件只有 $2a + b = -4$ 一个约束，而不是像第一解法一样锁定了 $a = \frac{1}{7}, b = 0$.

寻找等号成立的充分条件:

$$\text{let } \Delta = b^2 + 4(a + 1)(2a + b)$$

$$= (2a + 4)^2 - 16(a + 1) = 4a^2 \leq 0$$

$$a = 0, b = -4$$

综上，最小值为 -4

更加一般地，我们讨论 $2a + b = -4$ 时，哪些 (a, b) 满足条件:

$$f(x) = (2a + b)x^2 + bx - a - 1$$

$$= -4x^2 + (-2a - 4)x - a - 1$$

$$= -[2x + (a + 1)][2x + 1]$$

倘若 $a \neq 0, x \in (\min\{-\frac{a+1}{2}, -\frac{1}{2}\}, \max\{-\frac{a+1}{2}, -\frac{1}{2}\})$, $f(x) > 0$, 不符合条件.

因此, 只能有 $a = 0, b = -4$.

Reflection:

此题 $x \in [-2, +2]$ 的条件是多余的, 势必导致第一想法的出现.

如果提前想好不等式方向, 便可以快速排除第一想法, 进入第二想法