

2025北京重点校高三上期中数学汇编：利用导数研究函数的性质（人教B版）

整理2025年北京重点校高三上学期期中数学试题中利用导数研究函数性质的36道题，涵盖单调性、极值、零点、切线与参数范围，仅收录题目。

2026年8月23日 · 数学 · 北京高考 · 高三期中 · 导数 · 函数性质

题目来源：菁师帮试卷 190953
本文仅整理题目，不含答案与解析。

本文共整理 36 道题，包括 7 道单选题、5 道填空题和 24 道解答题。

单选题

- 1.
- (2025 北京第五十五中学高三上期中)已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 在 $-\frac{\pi}{3}$ 处取到最小值,且在区间 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上存在极大值, ω 的最小整数解是()
- A. 2
- B. 8
- C. 10
- D. 14

解答:

由极小值点为 $-\frac{\pi}{3}$:

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{6} &= -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \omega &= 2 - 6k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

然后考虑极大值点在区间上的存在性:

$$\frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{6} > \frac{\pi}{2} \implies \omega > 2 \implies k = -1, \omega_{\min} = 8$$

正确答案:B

2.

(2025 北京顺义牛栏山第一中学高三上期中) 已知函数 $f(x) = |\ln(x+1)| - kx$, 则下列结论中正确结论的个数为 ()

- ① 存在正数 k , 使 $f(x)$ 在定义域内单调递减;
- ② 当 $-1 \leq k \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 有唯一零点;
- ③ 若 $f(x)$ 存在两个零点 x_1, x_2 , 且 $|x_1 - x_2| > 2$, 则 $k \in (0, \frac{\ln 3}{2})$ 。

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

对于①, 取 $k = 1$, 则:

$$x \in (-1, 0), f(x) = -\ln(x+1) - x \downarrow$$

$$x \in (0, +\infty), f(x) = \ln(x+1) - x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 < f'(0) = 0$$

$$x \in (0, +\infty), f(x) \downarrow$$

对于②, 我们结合图像, 做出左右切线:

$$\begin{cases} y = kx, k \in [-1, 0] \\ y = |\ln(x+1)| \end{cases}$$

仅有 $(0, 0)$ 这一个交点

对于③, 不妨设 $x_1 < x_2$ 易知 $k \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, 分类:

$$k \in (-\infty, -1), x_2 = 0, x_1 \in (-1, 0)$$

$$|x_2 - x_1| \in (0, 1)$$

$$k \in (0, +\infty), x_1 = 0, \ln(x_2 + 1) = kx_2$$

$$k = \frac{\ln(x_2 + 1)}{x_2}$$

$$g(x) = \frac{\ln(x + 1)}{x}, x > 0$$

$$g'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x + 1)}{x^2} < 0$$

$$|x_2 - x_1| = x_2 > 2, k = g(x_2) < g(2) = \frac{\ln 3}{2}$$

$$\therefore k \in (0, \frac{\ln 3}{2})$$

正确答案:D

3.

(2025 北京第一六六中学高三上期中)已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在实数集上的图象均为一条连续不断的曲线,且满足:
 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$,都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \geq |g(x_1) - g(x_2)|$. 命题 p :若函数 $f(x)$ 在实数集上单调递增,则函数
 $h(x) = f(x) - g(x)$ 不是减函数; 命题 q :若函数 $f(x)$ 在实数集上无最大值,则函数 $g(x)$ 无最大值. 则下列判断
 正确的是()

- A. p 和 q 都是真命题
- B. p 和 q 都是假命题
- C. p 是真命题, q 是假命题
- D. p 是假命题, q 是真命题

对于命题 p ,不严谨的证明是:

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \geq \left| \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \\
 & \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \geq \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \left| \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \\
 & |f'(x_1)| \geq |g'(x_1)| \\
 & f'(x) \geq 0, f'(x) \geq |g'(x)| \\
 & h'(x) = f'(x) - g'(x) \\
 & \geq f'(x) - |g'(x)| \geq 0
 \end{aligned}$$

这样可以不完备地说明 $h(x)$ 不减.

注意,可导函数一定连续,连续函数不一定可导. 以上的证明方法默认了 $f(x), g(x)$ 均可导.

严谨的书写如下:

$$\begin{aligned}
 & x_1 < x_2, f(x_1) - f(x_2) < 0 \\
 & h(x_1) - h(x_2) \\
 & = f(x_1) - f(x_2) - [g(x_1) - g(x_2)] \\
 & = -|f(x_1) - f(x_2)| - [g(x_1) - g(x_2)] \\
 & \leq -|f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)| \leq 0
 \end{aligned}$$

对于命题 q ,可以构造反例:

$$\begin{aligned}
 & f(x) = e^x \\
 & g(x) = \begin{cases} e^x, & x \in (-\infty, 0], \\ x + 1, & x \in (0, 1) \\ -x + 3, & x \in [1, +\infty) \end{cases}
 \end{aligned}$$

显然这样的构造符合题干要求,推翻了命题 q .

正确答案:C

4.

(2025 北京朝阳高三上期中)若函数 $f(x) = x + \frac{a}{x^2}$ 在区间 $[1, 2]$ 上是单调函数,则实数 a 的取值范围是()

A. $(-\infty, \frac{1}{2}] \cup [4, +\infty)$

B. $(-\infty, 0] \cup [8, +\infty)$

C. $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$

D. $[0, \frac{1}{2}] \cup [8, +\infty)$

要求导函数 $f'(x) = 1 - \frac{2a}{x^3}$ 无变号零点:

$$f'(x) = \frac{1}{x^3}(x^3 - 2a), x \in [1, 2]$$

$$2a \in (-\infty, 1] \cup [8, +\infty)$$

$$a \in (-\infty, \frac{1}{2}] \cup [4, +\infty)$$

正确答案:A

5.

(2025 北京第五中学高三上期中)下列函数中,在其定义域内既是奇函数,又是减函数的是()

A. $f(x) = \frac{1}{x}$

B. $f(x) = \sqrt{-x}$

C. $f(x) = 2^{-x} - 2^x$

D. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} |x|$

正确答案:C

6.

(2025 北京汇文中学高三上期中)对于函数 $f(x)$,若存在实数 x_0 ,使 $f(x_0)f(x_0 + \lambda) = 1$,其中 $\lambda \neq 0$,则称 $f(x)$ 为“可移 λ 倒数函数”, x_0 为“ $f(x)$ 的可移 λ 倒数点”. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ \frac{1}{x+a}, & x < 0 \end{cases}$,若函数 $f(x)$ 恰有 3 个“可移 1 倒数点”,则 a 的取值范围()

A. $(2, e)$

B. $(2, +\infty)$

C. $(-1, 2)$

D. $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, e)$

函数 $f(x)$ 恰有 3 个“可移 1 倒数点”，等价于 $g(x) = f(x)f(x+1) - 1$ 恰有三个零点，下面按照“易中天”的顺序思考：

$$x \in (0, +\infty), g(x) = e^x \cdot e^{x+1} - 1 > e - 1 > 0$$

$$x \in (-1, 0), g(x) = \frac{e^{x+1}}{x+a} - 1 = 0$$

$$e^{x+1} = x + a > 0$$

$$x \in (-\infty, -1), g(x) = \frac{1}{(x+a)(x+a+1)} - 1 = 0$$

$$(x+a)(x+a+1) = 1$$

我们接下来为 $g(x)$ 的三个零点划定归属：

- $x_1 < x_2 < -1 < x_3 < 0$
- $x_1 < -1 < x_2 < x_3 < 0$

对于 $x_1 < x_2 < -1 < x_3 < 0$ ，对应图像中 $y = x + a$ 与 $y = e^{x+1}$ 相切，即 $a = 2$ ，切点 $(-1, 1)$ ，与 $x_3 > -1$ 矛盾

对应 $x_1 < -1 < x_2 < x_3 < 0$ ，对应图像中 $a \in (2, e)$ ，接下来考虑二次函数零点个数的约束：

$$x^2 + (2a+1)x + (a^2 + a - 1) = 0$$

$$\Delta = (2a+1)^2 - 4(a^2 + a - 1)$$

$$= 4a + 5 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{4a+5}}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-(2a+1) - \sqrt{4a+5}}{2} < -1, \\ x_2 = \frac{-(2a+1) + \sqrt{4a+5}}{2} \geq -1 \end{cases}$$

对于 x_1 ，有：

$$x_1 < -a < -1$$

对于 x_2 ，有：

$$-(2a+1) + \sqrt{4a+5} \geq -2$$

$$\sqrt{4a+5} \geq 2a-1 \geq 3 > 0$$

$$4a+5 \geq 4a^2-4a+1$$

$$4a^2-8a-4 \leq 0$$

$$4(a-1)^2-8 \leq 0$$

$$|a-1| \leq 2$$

$$a \in [-1, 3]$$

综上,有: $a \in (2, e)$

正确答案:A

7.

(2025 北京第一七一中学高三上期中)已知 $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leq 0 \\ kx^2 - x, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = f(x) - m$, 其中 k, m 是常数, 则()

- A. 存在实数 k , 使得对任意实数 m , 函数 $g(x)$ 都有零点
- B. 存在实数 m , 使得对任意实数 k , 函数 $g(x)$ 至少有 2 个零点
- C. 对于任意实数 m , 存在实数 k , 使得函数 $g(x)$ 恰有 2 个零点
- D. 对于任意实数 k , 存在实数 m , 使得函数 $g(x)$ 恰有 3 个零点

对 k 的符号进行分类, 可以确定抛物线的开口方向和单调性, 或退化情况:

$$x_0 = \frac{1}{2k}$$

$k = 0, m \in (0, +\infty), g(x)$ 没有零点

$m = 0, g(x)$ 有唯一零点

$m \in (-\frac{1}{e}, 0), g(x)$ 有且仅有三个零点

$m = -\frac{1}{e}, g(x)$ 恰有两个零点

$m \in (-\infty, -\frac{1}{e}), g(x)$ 恰有一个零点

$k < 0, x_0 < 0$, 同 $k=0$

此时,我们可以知难而退, $k > 0$ 时顶点处函数值与 $-\frac{1}{e}$ 的大小关系还会影响分类,这样过于复杂. 我们直接从选项入手.

A:要使对于任意实数 $m, g(x)$ 都有零点,要求 $f(x)$ 值域为 $\mathbb{R}$,这表明 $k > 0$,否则 $f(x) \leq 0$.

若 $k > 0$,则 $f(x)$ 有最小值,取足够小的 m 就可以让 $g(x) > 0$. 所以A不正确

B:取 $m \in (-\frac{1}{e}, 0)$,可以使得 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上恰有两个零点,符合B. B正确

C:取 $m \in (0, +\infty)$,根据二次函数的图像, $g(x)$ 有且仅有一个零点,所以C不正确.

D:取一个极特殊的 $k > 0$,使得抛物线顶点处函数值 $-\frac{1}{4k}$ 等于 $-\frac{1}{e}$,即可让 $g(x)$ 可能的零点数目为0, 1, 2, 4,D不正确.

正确答案:B

填空题

8.

(2025 北京顺义第一中学高三上期中)已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{x} (x > 0)$,若 $f(x)$ 为单调递增函数,则实数 a 的范围为_____,若 $f(x) \geq 3$ 恒成立,则实数 a 的范围_____.

$f(x)$ 为单调递增函数 $\iff f'(x) \geq 0$

$$f'(x) = 1 - \frac{a}{x^2} \geq 0$$

$$a \leq 0, f'(x) \geq 1 > 0$$

$$a > 0, x \in (0, \sqrt{a}), f'(x) < 0$$

综上, $a \in (-\infty, 0]$

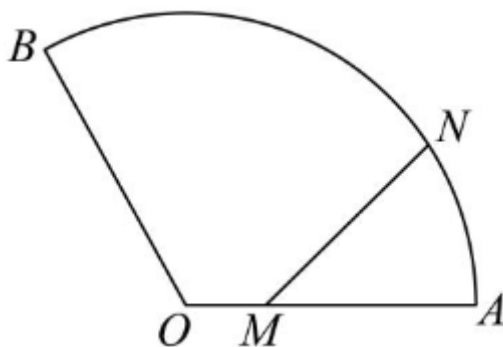
对于第二个空, 如果 $a \leq 0$, $f(1) = 1 + a < 3$, 不符合题意.

如果 $a > 0$, $\min_{x>0} f(x) = 2\sqrt{a} \geq 3$, 有 $a \geq \frac{9}{4}$.

综上, $a \in [\frac{9}{4}, +\infty)$

9.

(2025 北京海淀高三上期中) 某社区内有一扇形草坪如图, 扇形的半径 OA 为 60 米, $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$. 甲从圆心 O 出发, 沿 OA 以每秒 1 米的速度向 A 慢走; 同时乙从 A 出发, 沿 $\widehat{AB}$ 以每秒 $\frac{2\pi}{3}$ 米的速度向 B 慢跑. 经过 t ($0 \leq t \leq 60$) 秒, 甲、乙所在位置分别为 M, N , 记 MN 的长度为 $f(t)$ 米. 给出下列四个结论:



- ① 当 $t = 30$ 时, $MN \perp OA$;
- ② 函数 $y = f(t)$ 在区间 $(30, 45)$ 上单调递增;
- ③ 方程 $f(t) = 60$ 在区间 $(45, 60)$ 上恰有一个根;
- ④ 若函数 $f(t)$ 在 $t = t_0$ 处取得最小值, 则 $t_0 \in (0, 30)$ 。

其中所有正确结论的序号是_____。

①:

$$MN \perp OA \iff R \cos \angle MON = OM$$

$$60 \cos \frac{2\pi}{3 \cdot 60} t = t, t \in [0, 60]$$

$$t = 30$$

②:

在 $\triangle MON$ 中使用余弦定理:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{R^2 + OM^2 - 2R \cdot OM \cdot \cos \angle MON} \\ &= \sqrt{60^2 + (t)^2 - 2(60)(t) \cos \frac{\pi}{90} t} \\ &= \sqrt{60^2 + t^2 - 120t \cos \frac{\pi}{90} t} \end{aligned}$$

$$(t \cos \frac{\pi}{90} t)' = \cos \frac{\pi}{90} t - t \frac{\pi}{90} \sin \frac{\pi}{90} t < \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} < 0,$$

$$(t^2)' = 2t > 0,$$

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{60^2 + t^2 - 120t \cos \frac{\pi}{90} t}} [(t^2)' - 120(t \cos \frac{\pi}{90} t)'] > 0, t \in (30, 45)$$

事实上,从几何直观上看, $t \in (30, 45)$, $t \uparrow$, M, N 的横纵间距都在增大.

但是代数法自有强大之处:对于 $t \in [30, 60]$,我们同样可以得到 $f(t)$ 的单调性. 但是由于 M, N 纵坐标在 $t \in [45, 60]$ 上单减,难以继续沿用几何法.

$$t \in [30, 60], \frac{\pi}{90} t \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}], (t \cos \frac{\pi}{90} t)' = \cos \frac{\pi}{90} t - t \frac{\pi}{90} \sin \frac{\pi}{90} t < \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} < 0$$

③:

沿用②的拓展结论, $f(45) = \sqrt{60^2 + 45^2} = 75$,那么:

$$t \in [45, 60], f(t) \geq f(45) > 60$$

$$f(t) = 60 \text{ 无解}$$

④:

$$t \in [30, 60], f(t) \uparrow$$

那么,只需要考虑 $t \in [0, 30]$,在这个闭区间里,最小值要么出自于端点,要么出自于内部的极小值点.

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{60^2 + t^2 - 120t \cos \frac{\pi}{90}t}} [(t^2)' - 120(t \cos \frac{\pi}{90}t)'], t \in [0, 30]$$

$$= k(2t - 120 \cos \frac{\pi}{90}t + 120t \frac{\pi}{90} \sin \frac{\pi}{90}t)$$

$$t \uparrow, (2t - 120 \cos \frac{\pi}{90}t + 120t \frac{\pi}{90} \sin \frac{\pi}{90}t) \uparrow$$

$$f'(0) < 0, f'(30) > 0$$

$$\exists x_0 \in (0, 30), x \in (0, x_0), f'(x) < 0,$$

$$x \in (x_0, 60), f'(x) > 0$$

所以, $\min_{t \in [0, 60]} f(t) = f(x_0), x_0 \in (0, 30)$

正确答案:①②④

反思:返璞归真的代数法,反而快于几何法,因为减少了不同方法的切换overhead.

10.

(2025 北京东直门中学高三上期中) 写出一个满足条件①②③的函数 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

- ① $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$;
- ② $f(x)$ 的值域为 $[0, 1]$;
- ③ $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极值点。

$$\text{例: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{-x+1}, & x < 0 \end{cases}$$

11.

(2025 北京第一零一中学高三上期中) 已知函数 $f(x) = \frac{\cos x}{x^2+1}$, 给出下列四个结论:

- ① 函数 $f(x)$ 的图象关于原点中心对称;
- ② 存在 $x_0 > 0$, 使得 $f(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- ③ 函数 $f(x)$ 的图象与函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象没有公共点;
- ④ 函数 $f(x)$ 的极值点个数为 3。

其中所有正确结论的序号是_____。

①:显然 $f(1) + f(-1) = 2f(1) \neq 0$,错误

②: $f(0) = 1, x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow 0$,由零点存在性定理,正确

③:

$$\frac{\cos x}{x^2 + 1} = \frac{1}{x}$$

$$\cos x = x + \frac{1}{x}$$

$$|\cos x| = \left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$$

这将与三角函数的有界性矛盾,故无公共点

④:

$$f'(x) = \frac{(-\sin x)(x^2 + 1) - (\cos x)(2x)}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

$$(x^2 + 1) \sin x + 2x \cos x = 0$$

$$\cos x \neq 0$$

$$g(x) = (x^2 + 1) \tan x + 2x = 0$$

显然, $g(x)$ 为奇函数,则 $g(x)$ 的零点关于 $x = 0$ 对称.

$$x > 0, k \in \mathbb{N}^*, x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^+, \tan x \rightarrow -\infty, g(x) \rightarrow -\infty$$

$$g(k\pi) = 2k\pi > 0$$

根据零点存在性定理,必然存在无数个 $x \in (k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{N}^*, s.t. f'(x) = 0$

正确答案:②③

12.

(2025 北京育才学校高三上期中) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3+x^2} - (kx + b)$, 给出下列四个结论:

① 当 $k = 0$ 时, 对任意 $b \in \mathbf{R}$, $f(x)$ 有 1 个极值点;

② 当 $k > \frac{1}{8}$ 时, 存在 $b \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x)$ 存在极值点;

③ 当 $b = 0$ 时, 对任意 $k \in \mathbf{R}$, $f(x)$ 有一个零点;

④ 当 $0 < b < \frac{1}{3}$ 时, 存在 $k \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x)$ 有 3 个零点。

其中所有正确结论的序号是_____。

①: $k = 0$, 显然 $x = 0$ 是 $f(x)$ 唯一的极值点

②:

$$f'(x) = 2x \frac{-1}{(x^2 + 3)^2} - k = 0$$

$$x \neq 0$$

$$k = \frac{2(-x)}{(x^2 + 3)^2}$$

$$= \frac{2(-x)}{(x^2 + 1 + 1 + 1)^2}$$

$$\leq \frac{2|x|}{(4\sqrt{|x|})^2} = \frac{1}{8} (x = -1)$$

$$x = 0, k = 0$$

则②错误, 因为 $k > \frac{1}{8}$ 使得 $f(x)$ 单调递减

③:

$$f(x) = 0$$

$$kx = \frac{1}{x^2 + 3}$$

$$kx(x^2 + 3) = 1$$

$$kx^3 + 3kx - 1 = 0$$

取 $k = 0, f(x) \neq 0$, 无零点

④:

$$kx + b = \frac{1}{x^2 + 3}$$

$$(kx + b)(x^2 + 3) - 1 = 0$$

$$g(x) = kx^3 + bx^2 + 3kx + (3b - 1) = 0$$

$$g'(x) = 3kx^2 + 2bx + 3k$$

$$\Delta = 4b^2 - 36k^2 > 0$$

通过选取较小的 k ,可以让 $g(x)$ 出现不单调的情况,这否定不了④.

我们使用一元三次方程有三个不同实根的充要条件:

$$\Delta = b^2(3k)^2 - 4k(3k)^3 - 4b^3(3b - 1) - 27k^2(3b - 1)^2 + 18k(b)(3k)(3b - 1) > 0$$

解答题

13.

(2025 北京第五十五中学高三上期中)已知函数 $f(x) = ae^x - \ln(x + 1)$ ($a \in \mathbf{R}, a \neq 0$).

(1)当 $a = 2$ 时,求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2)讨论函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的极值点的个数;

(3)若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上有唯一零点 t ,证明: $t < 1$.

14.

(2025北京顺义牛栏山第一中学高三上期中)已知函数 $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{e^{ax}}$ 在 $x = 2$ 处的切线为 $y = \frac{2}{e^2}x - \frac{4}{e^2}$.

(1)求 a ;

(2)证明:函数 $f(x)$ 有最小值.

15.

(2025北京汇文中学高三上期中)已知函数 $f(x) = \frac{x+2}{x^2+3x}$

(1)求曲线 $y = f(x)$ 在点 $A(-2, f(-2))$ 处的切线方程;

(2)设函数 $g(x) = f(x) - \ln(x + 2)$.

(i) 求 $g(x)$ 的单调区间;

(ii) 判断 $g(x)$ 的零点个数,并说明理由;

(3)若存在 m 条互相平行的直线与曲线 $y = f(x)$ 相切,写出 m 的最大值(只需写出结论)

16.

(2025 北京北师大附中高三上期中)已知函数 $f(x) = (x^2 - ax + 1) \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1)若 $a = 2$,求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2)若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上各恰有一个零点,分别记为 x_1 和 x_2 ,

(i) 证明:函数 $f(x)$ 在两点 $(x_1, 0), (x_2, 0)$ 处的切线平行;

(ii) 记曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, 0)$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形面积为 S , 求 $\frac{S}{x_2 - x_1}$ 的最大值。

17.

(2025 北京北师大附中高三上期中)已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{kx-1} (k \in \mathbf{R})$.

(1)求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2)求 $f(x)$ 的极小值点;

(3)当 $k > 0$ 时,若对任意 $x \in (\frac{1}{k}, +\infty)$, $k^2 f(x) > ax + 1$ 恒成立,记此时实数 a 的最大值为 $g(k)$,求 $g(k)$ 的解析式.

18.

(2025 北京第八中学高三上期中)已知函数 $f(x) = a \ln^2 x - x \ln x + x$.

(1)若 $a = 0$,求 $f(x)$ 的零点;

(2)若 $a > 0$,讨论 $f(x)$ 的单调性;

(3)若 $a \in (0, 1)$, e 为自然对数的底数,证明: $f(e^a) < 1$.

19.

(2025 北京顺义第一中学高三上期中)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$, $f(0) = 0$, $f(x)$ 的导函数 $f'(x) = (x+1) \ln(x+1)$, l_1 为 $A(a, f(a)) (a \neq 0)$ 处的切线.

(1) $f'(x)$ 的最小值;

(2) $a > 0$,除点 A 外,曲线 $y = f(x)$ 均在 l_1 上方;

(3) 若 $-1 < a < 0$ 时,直线 l_2 过 A 且与 l_1 垂直, l_1, l_2 分别于 x 轴的交点为 x_1 与 x_2 ,求 $\frac{2a-x_1-x_2}{x_2-x_1}$ 的取值范围.

20.

(2025 北京通州高三上期中)已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 其导函数 $f'(x) = e^x - 2ax - 1$.

- (1) 当 $a > 0$ 时, 求 $f'(x)$ 的单调区间;
- (2) 若 $f(0) = k + 1, g(x) = -ax^2 + k$, 求证: 函数 $f(x)$ 的图象恒在函数 $g(x)$ 的图象的上方;
- (3) 若 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极大值点, 求实数 a 的取值范围.

21.

(2025 北京通州高三上期中)已知函数 $f(x) = x^3 - ax^2 + ax - 1$ 有三个零点记为 $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$, 其中 $x_1 \in (0, 1)$ 和 $x_3 \in (1, +\infty)$.

- (1) 求实数 a 的取值范围;
- (2) 记曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, 0)$ 处的切线为 l , 设直线 l 与 y 轴交点的坐标为 $(0, m)$, 求 m 的范围.

22.

(2025 北京通州高三上期中)设函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$, 且 $f(0) = \sqrt{3}$.

- (1) 求 φ 的值;
- (2) 已知 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}]$ 上单调递减, 再从条件1、条件2、条件3这三个条件中选择一个作为已知, 使函数 $f(x)$ 存在, 求 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的取值范围.

条件①: $f(\frac{\pi}{6}) - f(0) = 1$;

条件②: $x = \frac{\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 的一个极值点;

条件③: $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称;

注: 如果选择的条件不符合要求, 第(2)问得0分, 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.

23.

(2025 北京第一六六中学高三上期中)已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - kx^3, k \in \mathbf{R}$.

- (1) 当 $k = 0$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $(0, 0)$ 处的切线方程;
- (2) 当 $0 < k < \frac{1}{3}$ 时,
 - ① 证明: 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内存在唯一的极值点;
 - ② 记 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的极值点为 m , 设函数 $g(x) = f(m+x) - f(m-x), x \in (0, m)$, 讨论函数 $g(x)$ 的单调性.

24.

(2025 北京朝阳高三上期中)已知函数 $f(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x}$.

- (1)求 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的最大值;
- (2)若函数 $g(x) = f(x) - \frac{1}{\pi}x$, 求证: $g(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有且只有一个极大值点;
- (3)若 $x \in (0, \pi)$, 写出 $\frac{x-f(x)}{x+f(x)}$ 的取值范围.(只需写出结论)

25.

(2025 北京朝阳高三上期中)已知函数 $f(x) = 2\ln x - (2a+1)x + \frac{1}{2}ax^2 (a \in \mathbf{R})$.

- (1)当 $a = 0$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
- (2)讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

26.

(2025 北京海淀高三上期中)已知函数 $f(x) = x^3 + ax$ 有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$. 记 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$.

- (1)若点 A 在直线 $y = -2x$ 上, 求 a 的值;
- (2)若函数 $g(x) = e^{-ax}$ 的图象上存在点 P , 使得 $\triangle PAB$ 是以 P 为顶点的等腰三角形, 求 a 的取值范围.

27.

(2025 北京海淀高三上期中)已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a(x-1)}{x-2}$, 再从条件1、条件2、条件3这三个条件中选择一个作为已知, 使得 $f(x)$ 唯一确定, 求:

- (1)曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
- (2)函数 $f(x)$ 的单调区间.

条件①: $f(1) = 0$;

条件②: $f(4) = 2\ln 2 + \frac{3}{2}$;

条件3: $f'(3) = -\frac{2}{3}$.

注: 如果选择的条件不符合要求, 本题得 0 分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分。

28.

(2025 北京东直门中学高三上期中)已知函数 $f(x) = x^2 - ax + 2\ln x, a \in \mathbf{R}$.

- (1)当 $a = 5$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;
- (2)已知 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$,

(i)求实数 a 的取值范围;

(ii)求 $2f(x_1) - f(x_2)$ 的最小值.

29.

(2025 北京育才学校高三上期中)已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

(1)求函数 $y = f(x)$ 的图象在点 $P(1, f(1))$ 处的切线 l 的方程;

(2)当 $x > 0$ 时,求证: $f(x) > x$;

(3)讨论函数 $y = f(x) - bx(b \in \mathbf{R}$ 且为常数)零点的个数.

30.

(24-25 高三上 · 北京高三上期中)已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ 在 $x = 1$ 处有极值-1.

(1)求实数 a, b 的值;

(2)求函数 $g(x) = ax + \ln x$ 的单调区间.

31.

(2025 北京第一七一中学高三上期中)已知函数 $f(x) = x - a \ln x$.

(1)求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2)求 $f(x)$ 的单调区间;

(3)若关于 x 的方程 $x - a \ln x = 0$ 有两个不相等的实数根,记较小的实数根为 x_0 ,求证: $(a - 1)x_0 > a$ 。

32.

(2025 北京第四中学高三上期中)已知函数 $f(x) = x - a \ln x - b(a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0)$ 。

(1)若 $a = b = 1$,求 $f(x)$ 的极值;

(2)若 $f(x) \geq 0$,求 ab 的最大值。

33.

(2025 北京第一六一中学高三上期中)已知函数 $f(x) = ax^2 - x \sin x + b$ 。

(1)当 $a = 1$ 时,求证:

① 当 $x > 0$ 时, $f(x) > b$;

② 函数 $f(x)$ 有唯一极值点;

(2) 若曲线 C_1 与曲线 C_2 在某公共点处的切线重合，则称该切线为 C_1 和 C_2 的“优切线”。若曲线 $y = f'(x)$ 与曲线 $y = -\cos x$ 存在两条互相垂直的“优切线”，求 a, b 的值。

34.

(2025 北京西城外国语学校高三上期中) 设 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \ln x - ax$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线方程;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 若函数 $f(x)$ 有两个相异零点 x_1, x_2 , 求证: $x_1 x_2 > e^2$.

35.

(2025 北京第十四中学高三上期中) 已知函数 $f(x) = e^x - 1 - m \sin x (m \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $m = 1$ 时,

(i) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(ii) 求证: $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}), f(x) > 0$.

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上恰有一个极值点, 求 m 的取值范围.

36.

(2025 北京昌平第一中学高三上期中) 已知函数 $f(x) = \ln x - (a + 2)x + ax^2 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 若 $f(x)$ 恰有两个零点, 求实数 a 的取值范围.