

2024—2026 北京高三一模数学汇编：对数函数

整理 2024—2026 年北京高三一模数学试题中的对数函数专题，共 19 道单选题与填空题，并附解答。

2026年8月16日 · 数学 · 北京高考 · 一模 · 对数函数

本文整理 2024—2026 年北京高三一模数学试题中的对数函数专题，并附解答。

一、单选题

1. (2026 北京海淀高三一模)

若函数

$$f(x) = \ln \frac{x+a}{x+1}$$

是奇函数，则 $a = (\quad)$

- A. -1
- B. $-\frac{1}{2}$
- C. 0
- D. 1

若 0 在函数定义域内，则由奇函数定义：

$$f(0) = \ln a = 0, a = 1$$

此时 $f(x) \equiv 0$ ，为常值函数。

但是继续考察函数定义域：

$$x+1 \neq 0, x \neq -1$$

$$I = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

不符合定义域对称的条件。

若0不在函数定义域中,则 $a \neq 1$:

$$\frac{x+a}{x+1} > 0$$

$$\iff (x+a)(x+1) > 0$$

$$x \in (-\infty, \min\{-a, -1\}) \cup (\max\{-a, -1\}, +\infty)$$

奇函数要求函数定义域对称,则 $(-a) + (-1) = 0, a = -1$.

检验结果:

$$\begin{aligned} & f(x) + f(-x) \\ &= \ln \frac{x-1}{x+1} + \ln \frac{-x-1}{-x+1} \\ &= \ln \frac{x-1}{x-1} = 0 \end{aligned}$$

反思:在一开始就讨论定义域,可以加快解题速度

正确答案: A

2. (2026 北京昌平高三一模)

下列函数中,在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减的是 ()

- A. $f(x) = -\frac{1}{x}$
- B. $f(x) = x^2 + x$
- C. $f(x) = \log_2(-x)$
- D. $f(x) = 3^{|x+1|}$

正确答案: C

3. (2026 北京朝阳高三一模)

某深度学习框架提供了一种自然指数衰减的学习率调整模型

$$L(k) = L_0 e^{-r \cdot \frac{k}{S}}$$

($L_0 \in (0, 1)$, $r \in (0, 1)$, $S \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$), 其中 L_0 为初始学习率, r 为衰减率, S 为衰减步长, k 为训练步数, $L(k)$ 为第 k 步时的学习率。

现有两种学习率衰减策略 A 和 B ，初始学习率 L_0 相同，策略 A 的参数为 $r_A = 0.9$ ， $S_A = 100$ ，策略 B 的参数为 $r_B = 0.95$ ， $S_B = 50$ 。已知当训练步数为 k_1 时，策略 A 的学习率首次大于策略 B 的学习率的 2 倍；当训练步数为 k_2 时，策略 A 的学习率首次大于策略 B 的学习率的 8 倍，则 () (参考数据： $0.6931 < \ln 2 < 0.6932$)

- A. $k_2 = 3k_1 - 2$
- B. $k_2 = 3k_1 - 1$
- C. $k_2 = 3k_1$
- D. $k_2 = 3k_1 + 1$

考察不等式：

$$e^{-0.009k} > 2e^{-0.019k}$$

$$-0.009k \geq \ln 2 - 0.019k$$

$$0.01k > \ln 2$$

$$k > 100 \ln 2 \in (69.31, 69.32)$$

$$k_1 = 70$$

$$e^{-0.009k} > 8e^{-0.019k}$$

$$0.01k > \ln 8 = 3 \ln 2$$

$$k > 300 \ln 2 \in (207.93, 207.96)$$

$$k_2 = 208$$

$$k_2 = 3k_1 - 2$$

正确答案：A

4. (2026 北京石景山高三一模)

设 $a = \log_{0.3} 0.2$ ， $b = \log_2 0.2$ ，则 ()

- A. $a + b < 0 < ab$
- B. $ab < 0 < a + b$
- C. $a + b < ab < 0$
- D. $ab < a + b < 0$

先比较 a , b 和 0 的大小关系：

$$a > \log_{0.3} 1 = 0$$

$$b < \log_2 1 = 0$$

$$ab < 0$$

注意到对数的真数相同,那么对对数取倒数可以让底数变为相同的真数:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_{0.2} 0.3 + \log_{0.2} 2$$

$$= \log_{0.2} 0.6 \in (0, 1)$$

$$\frac{a+b}{ab} \in (0, 1), ab < 0$$

$$\therefore ab < a + b < 0$$

启示:

- 当代数式有明确的代数关系时,优先挖掘代数关系
- 在对数的底数小于1时,换底公式后应注意分母的符号

正确答案: D

5. (2025 北京东城高三一模)

已知 $x > 1$, $y > 1$, 则 “ $4^x > 2^y$ ” 是 “ $\log_2 x > \log_4(y-1)$ ” 的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

考虑条件对应的等价条件:

$$4^x = 2^{2x} > 2^y$$

$$\iff 2x > y$$

$$\log_2 x > \log_4(y-1)$$

$$\iff \log_2 x > \frac{1}{2} \log_2(y-1)$$

$$\iff \log_2 x^2 > \log_2(y-1)$$

$$\iff x^2 > y-1$$

$$\iff x^2 + 1 > y$$

若 $2x > y$, 有 $x^2 + 1 > 2x > y$. 反之, 若 $x^2 + 1 > y$, 可以尝试寻找反例:

$$x^2 + 1 > y, y = 2x$$

$$x^2 + 1 > 2x$$

取任意 $x = k, y = 2k, k \in (1, +\infty)$ 都可以作为反例.

正确答案: A

6. (2025 北京海淀高三一模)

已知四个数

$$a = \frac{\lg 2 + \lg 5}{2}, \quad b = \sqrt{\lg 2 \cdot \lg 5}, \quad c = \lg 2, \quad d = \lg 5,$$

其中最小的是 ()

- A. a
- B. b
- C. c
- D. d

正确答案: C

7. (2025 北京西城高三一模)

下列函数中，图像关于 y 轴对称的是 ()

- A. $y = (x - 1)^2$
- B. $y = 2^x$
- C. $y = x^4 + x^2$
- D. $y = |\ln x|$

正确答案：C

8. (2025 北京房山高三一模)

已知 $a, b \in \mathbb{R}$ ，且 $a < b$ ，则 ()

- A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
- B. $a^2 < b^2$
- C. $a^3 < b^3$
- D. $\ln(b - a) > 0$

正确答案：C

9. (2025 北京顺义高三一模)

下列函数中，单调递增且值域为 $[0, +\infty)$ 的是 ()

- A. $y = x^2$
- B. $y = \sqrt{x + 1}$
- C. $y = 3^{x-1}$
- D. $y = \log_2 x$

正确答案：B

10. (2025 北京平谷高三一模)

下列函数中，在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增的是 ()

- A. $y = |x - 2|$
- B. $y = 2^{-x}$
- C. $y = \frac{1}{1 - x}$
- D. $y = -\ln x$

正确答案：C

11. (2024 北京门头沟高三一模)

设 $a > 0$, $b > 0$, 则 “ $\lg(a+b) > 0$ ” 是 “ $\lg(ab) > 0$ ” 的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

我们仍然分别寻找等价条件:

$$\lg(a+b) > 0$$

$$\iff a+b > 1$$

$$\lg(ab) > 0$$

$$\iff ab > 1$$

当 $ab > 1$ 时, 显然有 $a+b > 2\sqrt{ab} > 2 > 1$.

反之, 当 $a+b > 1$, 可寻找反例使得 $ab = 1$

$$a = 2, b = \frac{1}{2}$$

正确答案: B

12. (2024 北京东城高三一模)

设函数 $f(x) = \frac{1}{\ln x} + 1$, 则 ()

- A. $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2$
- B. $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 2$
- C. $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 2$
- D. $f(x) = 2f\left(\frac{1}{x}\right)$

注意到: $y = \frac{1}{\ln x}$ 为 "倒反函数"

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2$$

正确答案：A

13. (2024 北京东城高三一模)

已知 $a, b \in \mathbb{R}$, $ab \neq 0$, 且 $a < b$, 则 ()

- A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
- B. $ab < b^2$
- C. $a^3 < b^3$
- D. $\lg |a| < \lg |b|$

正确答案：C

14. (2024 北京延庆高三一模)

设 $a = \log_3 2$, $b = \log_9 6$, $c = \frac{1}{2}$, 则 ()

- A. $a > b > c$
- B. $c > b > a$
- C. $b > c > a$
- D. $b > a > c$

$$a > \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2} = c$$

$$b > \log_9 3 = \frac{1}{2} = c$$

$$a = \log_9 4 < \log_9 6 = b$$

$$\therefore c < a < b$$

正确答案：D

二、填空题

15. (2026 北京丰台高三一模)

函数 $f(x) = \sqrt{\log_2 x - 1}$ 的定义域为 _____。

$$\log_2 x - 1 \geq 0$$

$$x > 0$$

分别对应范围:

$$x \geq 2, x > 0$$

正确答案: $[2, +\infty)$

16. (2026 北京顺义高三一模)

函数 $f(x) = \sqrt{1 - \log_2 x}$ 的定义域为 _____。

$$x > 0, 1 - \log_2 x \geq 0$$

$$x > 0, x \leq 2$$

正确答案: $(0, 2]$

17. (2025 北京海淀高三一模)

已知函数

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & x \leq 1, \\ \log_a \left(\frac{1}{2}ax + 3 \right), & x > 1 \end{cases} \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1).$$

若 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, 2]$, 则 a 的一个取值为 _____; 若 $f(x)$ 的值域为 $\mathbb{R}$, 则 a 的取值范围是 _____。

因为 $a > 0$, 所以对数函数的内层函数 $t = \frac{1}{2}ax + 3$ 单调递增且无上界. 如果 $a > 1$, 则 $\log_a(\frac{1}{2}ax + 3)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时无上界.

所以对于第一个空, $a < 1$, 则 $y = \log_a(\frac{1}{2}ax + 3)$ 关于 x 单调递减. 又 $x \leq 1$ 时, $f(x) \in (-\infty, 2]$, 所以要求 $x \rightarrow 1^+$, $f(x) \leq 2$, 也就是:

$$\log_a \left(\frac{1}{2}a + 3 \right) \leq 2$$

$$\frac{1}{2}a + 3 \geq a^2$$

那么, 易知 $a \in (0, 1)$ 都是合适的. 取 $a = \frac{1}{2}$.

若 $f(x)$ 值域为 $\mathbb{R}$,则 $a > 1$,且要确保 $x \rightarrow 1^+, f(x) \leq 2$:

$$\log_a\left(\frac{1}{2}a + 3\right) \leq 2$$

$$\frac{1}{2}a + 3 \leq a^2$$

$$(2a + 3)(a - 2) \geq 0$$

$$a \in [2, +\infty)$$

正确答案: $\frac{1}{2}; [2, +\infty)$

18. (2025 北京房山高三一模)

已知函数

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 1, \\ \log_2(x + 7), & x \geq 1, \end{cases}$$

则 $f(0) + f(1) =$ _____。

$$f(0) = 2^0 = 1$$

$$f(1) = \log_2(1 + 7) = \log_2 8 = 3$$

$$f(0) + f(1) = 4$$

正确答案: 4

19. (2025 北京朝阳高三一模)

函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \log_3 x$ 的定义域为 _____。

$$1 - x > 0, x > 0$$

$$x \in (0, 1)$$

正确答案: $(0, 1)$