

2024—2026 北京高三一模数学汇编：函数的基本性质

整理 2024—2026 年北京高三一模数学试题中的函数基本性质专题，共 10 道单选题与填空题，仅收录题目。

2026年8月16日 · 数学 · 北京高考 · 一模 · 函数的基本性质

本文整理 2024—2026 年北京高三一模数学试题中的函数基本性质专题。以下仅收录题目，不含答案与解答过程。

一、单选题

1. (2026 北京海淀高三一模)

已知函数

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & x < 0, \\ bx^2 - ax, & x \geq 0, \end{cases}$$

则“ $ab < 0$ ”是“ $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为单调函数”的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

如果 $ab > 0$, 则 a, b 同号, 显然有 $s \rightarrow +\infty, t \rightarrow -\infty, f(s), f(t) \rightarrow \pm\infty$, 则与“ $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为单调函数”矛盾.

如果 $ab = 0$, 取 $a = 1, b = 0$, 则有 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减.

如果 $ab < 0$, 函数在 y 轴两侧对应的抛物线开口方向相反, 且 $f(0) = f(0^-) = 0$.

现在考察两个抛物线的对称轴:

$$-\frac{b}{2a} > 0, \frac{a}{2b} < 0$$

因此, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为单调函数 $\iff ab \leq 0$

正确答案:A

2. (2026 北京房山高三一模)

设 $0 < a < 1$, 函数

$$f(x) = \begin{cases} a(x+2), & x < -a, \\ \sqrt{a^2 - x^2}, & -a \leq x \leq a, \\ -a(x-2), & x > a, \end{cases}$$

则 $f(x)$ ()

- A. 是偶函数, 且有最大值
- B. 是偶函数, 且没有最大值
- C. 是奇函数, 且有最大值
- D. 是奇函数, 且没有最大值

先判断奇偶性:

$$x \in [-a, +a], f(-x) = f(x)$$

$$x \in (a, +\infty),$$

$$f(x) = -a(x-2) = a(-x+2) = f(-x)$$

所以函数 $f(x)$ 为偶函数.

函数 $f(x)$ 若没有最大值, 很可能是有上确界, 但是取不到.

由于 $f(x)$ 是偶函数, 只考虑 $[0, +\infty)$ 的情况:

$$x \in [0, a], f(x) \leq f(0) = a$$

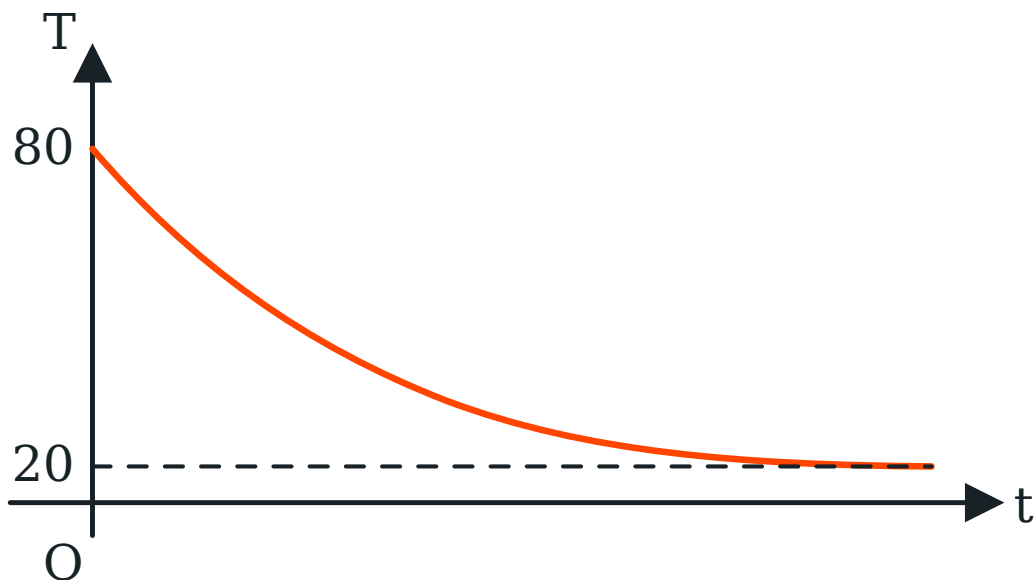
$$x \in (a, +\infty), f(x) < f(a^+) = -a^2 + 2a > a$$

所以 $\sup f(x) = -a^2 + 2a$, 等号无法成立, $f(x)$ 没有最大值.

正确答案:B

3. (2025 北京东城高三一模)

中国茶文化博大精深，茶水的口感与水的温度有关。一杯 80°C 的热红茶置于 20°C 的房间里，茶水的温度 T (单位： $^{\circ}\text{C}$) 与时间 t (单位： min) 的函数 $T = f(t)$ 的图像如图所示。已知 t_1, t_3 不相等，下列说法正确的是 ()



- A. 若 $t_1 + t_3 = 2t_2$, 则 $f(t_1) + f(t_3) > 2f(t_2)$
- B. 若 $t_1 + t_3 > 2t_2$, 则 $f(t_1) + f(t_3) > 2f(t_2)$
- C. 若 $f(t_1) + f(t_3) = 2f(t_2)$, 则 $t_1 + t_3 < 2t_2$
- D. 若 $f(t_1) + f(t_3) > 2f(t_2)$, 则 $t_1 + t_3 > 2t_2$

从凹凸性的角度考虑,有:

$$f(t_1) + f(t_3) > 2f\left(\frac{t_1 + t_3}{2}\right)$$

对于A:

$$t_1 + t_3 = 2t_2$$

$$f(t_1) + f(t_3) > 2f\left(\frac{t_1 + t_3}{2}\right) = 2f(t_2)$$

对于B:

$$t_1 + t_3 > 2t_2$$

$$f(t_1) + f(t_3) > 2f\left(\frac{t_1 + t_3}{2}\right) < 2f(t_2)$$

对于C:

$$f(t_1) + f(t_3) = 2f(t_2) > 2f\left(\frac{t_1 + t_3}{2}\right)$$

$$t_2 < \frac{t_1 + t_3}{2}$$

$$t_1 + t_3 > 2t_2$$

对于D:

$$f(t_1) + f(t_3) > 2f(t_2)$$

$$f(t_1) + f(t_3) > 2f\left(\frac{t_1 + t_3}{2}\right)$$

无法比较 $t_2, \frac{t_1 + t_3}{2}$.

正确答案:A

4. (2024 北京西城高三一模)

设

$$a = t - \frac{1}{t}, \quad b = t + \frac{1}{t}, \quad c = t(2 + t),$$

其中 $-1 < t < 0$, 则 ()

- A. $b < a < c$
- B. $c < a < b$
- C. $b < c < a$
- D. $c < b < a$

$$t \in (-1, 0), \frac{1}{t} < t < 0, t^2 > 0$$

$$a - b = -2\frac{1}{t} > 0$$

$$a > b$$

$$c = 2t + t^2 > 2t > t + \frac{1}{t} = b$$

比较 a, c :

$$t \rightarrow -1, a \rightarrow 0, c \rightarrow -1$$

$$c < a$$

原因是因为:

$$c < 0 < a$$

正确答案:C

启示:

- 运用极限情况,可以初步判断大小顺序
- 将0作为中间量,可以简化判断
- $|x| = 1$ 是 $x, \frac{1}{x}$ 大小关系的分界线.

二、填空题

5. (2026 北京西城高三一模)

记 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数。设 a, b 为正整数, 函数

$$f(x) = [ax] + [bx],$$

给出以下四个结论:

- ① 对于任意的 x_1, x_2 , 若 $x_1 < x_2$, 则 $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- ② 存在正整数 a, b , 使得曲线 $y = f(x)$ 关于坐标原点对称;
- ③ 设 $a = 2, b = 3$, 则方程 $f(x) = 10$ 有无数个解;

④ 设 $a = 2, b = 3$, 则当 $x \in [0, 1)$ 时, 函数 $f(x)$ 的值域中有且仅有 5 个元素。

其中, 所有正确结论的序号是 _____。

① 显然正确, 因为内层函数 $t = kx$ 和外层函数 $y = [t]$ 都不减。

②: 采用极限法分析

$$f(0^+) = 0 + 0 = 0$$

$$f(0^-) = -1 - 1 = -2$$

不可能让 $f(x)$ 为奇函数

③: 解方程

$$[2x] + [3x] = 10$$

如果指定 $[2x] = 4, [3x] = 6$, 对应不等式:

$$4 \leq 2x < 5, 6 \leq 3x < 7$$

$$x \in [2, \frac{7}{3})$$

这对应无数个解。

此外, 结合①, $f(\frac{7}{3}) = 11, f(2^-) = 8$, 知方程的解为 $x \in [2, \frac{7}{3})$

或者这么解决:

对于③, 当 $a = 2, b = 3$ 时, $f(x) = [2x] + [3x]$,

设 $x = n + t, n \in \mathbf{Z}, t \in [0, 1)$, 可得 $[2x] = [2n + 2t] = 2n + [2t], [3x] = 3n + [3t]$,

所以 $f(x) = 5n + [2t] + [3t]$,

令 $f(x) = 10$, 可得 $5n + [2t] + [3t] = 10$, 解得 $n = \frac{10 - ([2t] + [3t])}{5}$,

当 $t \in [0, \frac{1}{3})$ 时, 可得 $[2t] = 0, [3t] = 0$, 可得 $[2t] + [3t] = 0$;

当 $t \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ 时, 可得 $[2t] = 0, [3t] = 1$, 可得 $[2t] + [3t] = 1$;

当 $t \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ 时, 可得 $[2t] = 1, [3t] = 1$, 可得 $[2t] + [3t] = 2$;

当 $t \in [\frac{2}{3}, 1)$ 时, 可得 $[2t] = 1, [3t] = 2$, 可得 $[2t] + [3t] = 3$;

设 $m = [2t] + [3t] \in \{0, 1, 2, 3\}$, 由 $n = \frac{10-m}{5}$ 且 n 为整数,

当 $m = 0$ 时, 可得 $n = 2 \in \mathbf{Z}$; 当 $m = 1$ 时, 可得 $n = \frac{9}{5} \notin \mathbf{Z}$;

当 $m = 2$ 时, 可得 $n = \frac{8}{5} \notin \mathbf{Z}$; 当 $m = 3$ 时, 可得 $n = \frac{7}{5} \notin \mathbf{Z}$;

所以当 $x = 2 + t$ 且 $t \in [0, \frac{1}{3})$ 时, 满足 $f(x) = 10$, 此时有无数个解, 所以③正确;

$$\textcircled{4}: f(x) = [2x] + [3x]$$

分类讨论 x :

$$x \in [0, \frac{1}{3}), f(x) = 0 + 0 = 0$$

$$x \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}), f(x) = 0 + 1 = 1$$

$$x \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}), f(x) = 1 + 1 = 2$$

$$x \in [\frac{2}{3}, 1), f(x) = 1 + 2 = 3$$

$$\therefore f(x) \in \{0, 1, 2, 3\}$$

正确答案:①③

6. (2026 北京昌平高三一模)

设函数

$$f(x) = \begin{cases} -ax + 1, & x > a, \\ (x + 2)^2, & x \leq a. \end{cases}$$

若 $f(x)$ 存在最小值, 则 a 的一个取值为 _____, a 的最小值为 _____。

我们直接寻找 a 的充要条件:

$$a = 0, f(x) \geq f(-2) = 0$$

$$a > 0, -a < 0, f(+\infty) = -\infty$$

对于 $a < 0$ 的情况, 我们根据端点分类讨论:

$$a \in [-1, 0), x > a, f(x) > f(a^+) = 1 - a^2 \geq 0$$

$$x \leq a, f(x) \geq f(-2) = 0, \text{符合题意}$$

$$a \in [-2, -1), x > a, f(x) > f(a^+) = 1 - a^2 < 0$$

$$x \leq a, f(x) \geq f(-2) = 0, \text{不符合题意}$$

$$a \in (-\infty, -2), x > a, f(x) > f(a^+) < 0$$

$$x \leq a, f(x) \geq f(a) > 0, \text{不符合题意}$$

综上, $a \in [-1, 0]$

正确答案: $a \in [-1, 0], a_{\min} = -1$

7. (2026 北京石景山高三一模)

设函数

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & x \in [-1, a), \\ ax+1, & x \in [a, 3]. \end{cases}$$

当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 的值域为 _____; 若方程 $f(x) - \frac{1}{2} = 0$ 有两个不同的解, 则实数 a 的一个取值可以是 _____。

当 $a = 0$ 时, 对自变量 x 的值分类讨论:

$$x \in [-1, 0), f(x) = \sqrt{x+1} \in [0, 1)$$

$$x \in [0, 3], f(x) = 1$$

综上, $f(x)$ 的值域为 $[0, 1]$.

若 $f(x) = \frac{1}{2}$ 有两个不同的解, 则两个解 $-1 \leq x_1 < a \leq x_2 \leq 3$:

$$\iff \begin{cases} 0 \leq \frac{1}{2} < \sqrt{a+1}, \\ \min\{a^2+1, 3a+1\} \leq \frac{1}{2} \leq \max\{a^2+1, 3a+1\}, \\ a \leq 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{4} < a+1, \\ (a^2+1-\frac{1}{2})(3a+1-\frac{1}{2}) \leq 0 \end{cases}$$

$$\iff a \in (-\frac{3}{4}, -\frac{1}{6}]$$

8. (2025 北京西城高三一模)

记 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数。设函数

$$f(x) = x + [x],$$

有以下四个结论：

- ① 函数 $f(x)$ 为单调函数；
- ② 对于任意的 x , $f(x) + f(-x) = 0$ 或 $f(x) + f(-x) = -1$ ；
- ③ 集合 $\{x \mid f(x) = a\}$ (a 为常数) 中有且仅有一个元素；
- ④ 满足 $f(x) + f(y) \leq 7$ 的点 (x, y) ($x \geq 0, y \geq 0$) 构成的区域的面积为 8。

其中，所有正确结论的序号是 _____。

对于①,显然有 $y = x$ 单调递增, $y = [x]$ 不减, 所以 $f(x)$ 单调递增

②: 设 $x = p + q, p \in \mathbb{Z}, q \in [0, 1)$, 下面对小数部分进行分类:

$$q \in (0, 1), -x = -p - q \in (-p-1, -p)$$

$$f(x) + f(-x) = p + (-p-1) = -1$$

$$q = 0, -x = -p$$

$$f(x) + f(-x) = p + (-p) = 0$$

③: 举反例 $a = -\frac{1}{2}$, 显然有 $f(x) \in [0, +\infty) \cup (-\infty, -1)$

④: 首先作出 $f(x)$ 与 x 的对应关系

$$x \in [p, p+1), f(x) = p+x \in [2p, 2p+1)$$

$$x \in [0, 1), f(x) \in [0, 1)$$

$$x \in [1, 2), f(x) \in [2, 3)$$

$$x \in [2, 3), f(x) \in [4, 5)$$

$$x \in [3, 4), f(x) \in [6, 7)$$

$$x \in [4, 5), f(x) \in [8, 9)$$

显然有 $x, y \in [0, 4)$, 下面根据 x 进行分类:

$$x \in (0, 1), f(x) = x \in (0, 1), f(y) \in [0, 7-x]$$

$$y_{\max} \in [3, 4), f(y_{\max}) = y_{\max} + 3 = 7 - x$$

$$y_{\max} = 4 - x$$

$$x \in (1, 2), f(x) = x+1 \in (2, 3), f(y) \in [0, 6-x]$$

$$y_{\max} \in [2, 3), f(y_{\max}) = y_{\max} + 2 = 6 - x$$

$$y_{\max} = 4 - x$$

$$x \in (2, 3), f(x) = x+2 \in (4, 5), f(y) \in [0, 5-x]$$

$$y_{\max} \in [1, 2), f(y_{\max}) = y_{\max} + 1 = 5 - x$$

$$y_{\max} = 4 - x$$

$$x \in (3, 4), f(x) = x+3 \in (6, 7), f(y) \in [0, 4-x]$$

$$y_{\max} \in [0, 1), f(y_{\max}) = y_{\max} = 4 - x$$

$$y_{\max} = 4 - x$$

综上, 区域面积等于 $x + y - 4 = 0$ 与坐标轴围成三角形的面积 $\frac{1}{2} \cdot 4^2 = 8$

9. (2025 北京石景山高三一模)

高斯取整函数 $f(x) = [x]$ 的函数值表示不超过 x 的最大整数, 例如, $[-3.5] = -4$, $[2.1] = 2$. 有如下四个结论:

① 若 $x \in (0, 1)$, 则

$$f(-x) + \frac{1}{2} = -\left(f(x) + \frac{1}{2}\right);$$

② 函数 $f(x) = [x]$ 与函数 $h(x) = x - 1$ 无公共点;

③

$$\sum_{k=1}^{23} f\left(-\frac{k}{7}\right) + \sum_{k=1}^{23} f\left(\frac{k}{7}\right) = -23;$$

④ 所有满足 $f(m) = f(n)$ ($m, n \in \left[0, \frac{10}{3}\right]$) 的点 (m, n) 组成区域的面积为 $\frac{28}{9}$ 。

其中所有正确结论的序号是 _____。

对于①:

$$x \in (0, 1), f(-x) = -1, f(x) = 0$$

$$f(-x) + \frac{1}{2} = -(f(x) + \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$$

对于②, $x \in [-1, 0), [x] = x - 1 = h(x)$, 有无穷个公共点.

对于③:

$$x \in \mathbb{Z}, f(x) + f(-x) = 0, x \neq \mathbb{Z}, f(x) + f(-x) = -1$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{23} f\left(-\frac{k}{7}\right) + \sum_{k=1}^{23} f\left(\frac{k}{7}\right) \\ = -23 + 3 = -20 \end{aligned}$$

对于④:

$$f(m) = f(n), m = p + q, p \in \mathbb{Z}, q \in [0, 1)$$

$$\iff \begin{cases} n \in [m, m+1), q = 0 \\ n \in [p, p+1), q \in (0, 1) \end{cases}$$

为了计算面积, 可以不考虑局部处的单点图像. 我们只考虑 $q \in (0, 1)$, 那么:

$$n \in [p, p+1)$$

$$m \in (0, 1), n \in (0, 1)$$

$$m \in (1, 2), n \in (1, 2)$$

$$m \in (2, 3), n \in (2, 3)$$

$$m \in (3, \frac{10}{3}], n \in (3, \frac{10}{3}]$$

事实上:

$$m \in [0, 1), n \in [0, 1)$$

$$m \in [1, 2), n \in [1, 2)$$

$$m \in [2, 3), n \in [2, 3)$$

$$m \in [3, \frac{10}{3}], n \in (3, \frac{10}{3}]$$

于是面积等于 $3 \cdot 1 + (\frac{1}{3})^2 = \frac{28}{9}$

10. (2024 北京丰台高三一模)

已知函数 $f(x)$ 具有下列性质:

① 当 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ 时, 都有

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) + 1;$$

② 在区间 $(0, +\infty)$ 上, $f(x)$ 单调递增;

③ $f(x)$ 是偶函数。

则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$; 函数 $f(x)$ 可能的一个解析式为 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

令 $x_1 = x_2 = 0, f(0) = 2f(0) + 1, f(0) = -1$

把常数吞入 $g(x)$ 中, 构造柯西方程:

$$g(x) = f(x) - k, x \geq 0$$

$$g(x_1 + x_2) + k = g(x_1) + k + g(x_2) + k + 1$$

$$\text{let } k = 2k + 1, k = -1$$

$$g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$$

由 $g(x) = f(x) - k = f(x) + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,有 $g(x) \equiv cx, c \in (0, +\infty)$

所以:

$$f(x) = \begin{cases} cx - 1, & x \geq 0, \\ -cx - 1, & x < 0 \end{cases} = c|x| - 1$$

其中, $c > 0$