

培尖教育2022五一刷题班 (5.1)(II)

本文为培尖教育2022五一刷题班 (5.1) 的第二部分, 继续通过典型例题讲解复数的共轭、模与复平面几何应用, 包括实数判定、四点共圆、重心共圆及托勒密不等式; 同时整理三角恒等变换、三倍角公式、三角函数最值与方程、复数换元解高次方程以及 Jensen 不等式等高联一试常用方法。

2026年7月5日 · 高联一试

例1

已知复数 z_1, z_2, z_3 满足 $|z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0$, 求证: $\frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_3+z_1)}{z_1 z_2 z_3}$ 为实数.

熟知 $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$, 只要证:

$$\frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)(z_3 + z_1)}{z_1 z_2 z_3} = \overline{\left[\frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)(z_3 + z_1)}{z_1 z_2 z_3} \right]}$$

考虑建立共轭复数与复数模的关系, 于是设 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r$

$$\begin{aligned} &= \frac{\overline{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)(z_3 + z_1)}}{\overline{z_1 z_2 z_3}} \\ &= \frac{\left(\frac{r^2}{z_1} + \frac{r^2}{z_2}\right)\left(\frac{r^2}{z_2} + \frac{r^2}{z_3}\right)\left(\frac{r^2}{z_3} + \frac{r^2}{z_1}\right)}{\frac{r^2}{z_1} \frac{r^2}{z_2} \frac{r^2}{z_3}} \\ &= \frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)(z_3 + z_1)}{z_1 z_2 z_3} \end{aligned}$$

Q.E.D.

例2

$ABCD$ 为圆内接四边形, 求证: $\triangle ABC, \triangle CDA, \triangle BCD, \triangle DAB$ 的重心共圆.

$ABCD$ 四点共圆的等价条件是:

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} : \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4} \in \mathbb{R}$$

在这个条件下,结论相当于:

$$\frac{\frac{z_1+z_3+z_4}{3} - \frac{z_2+z_3+z_4}{3}}{\frac{z_1+z_2+z_4}{3} - \frac{z_2+z_3+z_4}{3}} : \frac{\frac{z_1+z_3+z_4}{3} - \frac{z_1+z_2+z_3}{3}}{\frac{z_1+z_2+z_4}{3} - \frac{z_1+z_2+z_3}{3}} \in \mathbb{R}$$

结论和条件完全等价.

Q.E.D.

例3(托勒密定理)

在平面四边形 $ABCD$ 中,证明: $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$,当且仅当四边形 $ABCD$ 为圆内接凸四边形时取等号.

本题固然可以考虑平面几何构造相似三角形,但是需要根据A,B,C,D的排列顺序进行讨论,较繁.

用复数可以完成精彩绝伦的证明:

在复平面内,用复数 a, b, c, d 表示 A, B, C, D .

有恒等式:

$$\begin{aligned} (a-b)(c-d) + (a-d)(b-c) \\ = (a-c)(b-d) \end{aligned}$$

左右同时取模,注意取模对乘除法封闭,对加减法不封闭:

$$|a-b||c-d| + |a-d||b-c| \geq |(a-b)(c-d) + (a-d)(b-c)| = |a-c||b-d|$$

而这显然就是 $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$.

下面考虑取等条件:

三角不等式成立要求 $(a-b)(c-d)$ 和 $(a-d)(b-c)$ 共线(幅角终边相同)

也就是 $\frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(b-c)} \in \mathbb{R}$,正好是四点共圆的充要条件.

例4

已知 $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 \leq 2$, $a^2 + b^2 \leq 4$. 求 $|b(x^2 - y^2) + 2axy|$ 的最大值.

令 $z_1 = x + yi$, $|z_1| \leq \sqrt{2}$, $z_2 = b - ai$, $|z_2| \leq 2$

所求: $|b(x^2 - y^2) + 2axy| = |\Re(z_1^2 z_2)| \leq |z_1^2 z_2| \leq 4$

如果考虑柯西不等式,有:

$$\begin{aligned} & [b(x^2 - y^2) + 2axy]^2 \\ & \leq (a^2 + b^2)[(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2] \\ & = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)^2 \\ & \leq 4 \times 2^2 \end{aligned}$$

同样轻松愉快.

例5(经典老番)

求 $\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$ 的值。

$$\begin{aligned} & \sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ \\ & = \sin 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ \\ & = \frac{16 \cos 6^\circ \sin 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ}{16 \cos 6^\circ} \\ & = \frac{\sin 96^\circ}{16 \cos 6^\circ} \\ & = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

我们考察三倍角公式:

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \\ \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \\ \sin 3\alpha &= 4 \sin \alpha (\sin^2 60^\circ - \sin^2 \alpha) \\ &= 4 \sin 60^\circ \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ + \alpha) \\ \cos 3\alpha &= 4 \cos \alpha \cos(60^\circ - \alpha) \cos(60^\circ + \alpha) \\ \tan 3\alpha &= \tan \alpha \tan(60^\circ - \alpha) \tan(60^\circ + \alpha) \end{aligned}$$

回到所求式,发现:

$$\begin{aligned} & \sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ \\ & = \sin 6^\circ \sin 66^\circ \sin 42^\circ \sin 78^\circ \\ & = \frac{\sin 18^\circ}{4 \sin 54^\circ} \frac{\sin 54^\circ}{4 \sin 18^\circ} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

同理, $\cos 6^\circ \cos 42^\circ \cos 66^\circ \cos 78^\circ = \frac{1}{16}$

例6

函数 $f(x) = 2(\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}) \cos x - \sin 3x$, 且 $x \in [0, 2\pi]$ 。

(1) 求函数的最大值和最小值。

(2) 求方程 $f(x) = \sqrt{3}$ 的解。

(1)

$$\begin{aligned} & 2(\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}) \cos x - \sin 3x \\ &= 2(\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}) \cos x - \sin(2x + x) \\ &= \sin 2x \cos x + \sqrt{3} \cos x - \cos 2x \sin x \\ &= \sin(2x - x) + \sqrt{3} \cos x \\ &= 2 \sin(x + \frac{\pi}{3}) \in [-2, +2] \end{aligned}$$

(2)

$$\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{得 } x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ 或 } x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{即 } x = 2k\pi \text{ 或 } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

考虑到 x 的范围, $x = 0, 2\pi, \frac{\pi}{3}$

例7

$$\text{Solve : } x^5 + 10x^3 + 20x - 4 = 0$$

巧妙换元: $x = z - \frac{2}{z}, z \in \mathbb{C}$

$$z^5 - \frac{32}{z^5} - 4 = 0$$

解得: $z^5 = -4$ or 8

$$z = -\sqrt[5]{4}(\cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}) (k = 0, 1, 2, 3, 4) \text{ or } \sqrt[5]{8}(\cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}) (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

带入即求得 x .

例8

已知锐角 A, B, C 满足 $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1$,

求 $A + B + C$ 的最大值。

条件等价于

$$\begin{aligned}\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C &= 1 \\ 1 &\leq 3 \cos \frac{2(A+B+C)}{3} \\ \frac{2(A+B+C)}{3} &\leq \arccos \frac{1}{3}\end{aligned}$$

得到 $A + B + C \leq \frac{3}{2} \arccos \frac{1}{3}$

你可能会认为这里Jensen不等式的使用有问题,事实上如果有一个角的两倍超过 $\frac{\pi}{2}$, $A + B + C$ 将不会太大.

不妨设 $A > \frac{\pi}{4}$, 则: $\sin^2 B + \sin^2 C = 1 - \sin^2 A < \frac{1}{2}$

固定A,我们只要求出 $B + C$ 的最大值.

显然 $B, C \in (0, \frac{\pi}{4})$, 否则 $\sin^2 B + \sin^2 C > \frac{1}{2}$

则: $\sin^2 B + \sin^2 C = 1 - \sin^2 A = 1 - \frac{\cos 2B + \cos 2C}{2}$

于是有 $\cos 2B + \cos 2C = 2 \sin^2 A \leq 2 \cos(B + C)$

得到: $B + C \leq \arccos(\sin^2 A)$

则 $A + B + C \leq A + \arccos(\sin^2 A)$

构造函数 $f(x) = x + \arccos(\sin^2 x)$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1 + 2 \sin x \cos x \frac{-1}{\sqrt{1 - \sin^4 x}} \\ &= 1 - \sqrt{\frac{4 \sin^2 x \cos^2 x}{1 - \sin^4 x}} \\ &= 1 - \sqrt{\frac{4t^2(1 - t^2)}{1 - t^4}} \\ &= 1 - \sqrt{\frac{4t^2}{1 + t^2}} < 0 \quad (t = \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2})\end{aligned}$$

所以 $f(x) < f(\frac{\pi}{4}) = \frac{7\pi}{12} < \frac{3}{2} \arccos \frac{1}{3}$

以上的叙述过繁,我们有另一种方法:

18. 已知锐角 A, B, C 满足 $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1$, 求 $A + B + C$ 的最大值。

整理解答:

利用降幂公式 $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$, 将已知条件转化:

$$\frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + \frac{1 - \cos 2C}{2} = 1$$

化简得:

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 1$$

利用和差化积公式, 展开前两项:

$$2 \cos(A + B) \cos(A - B) + \cos 2C = 1$$

$$2 \cos(A + B) \cos(A - B) = 1 - \cos 2C$$

$$\cos(A + B) \cos(A - B) = \sin^2 C$$

因为 A, B 为锐角, 所以 $A - B \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 从而 $0 < \cos(A - B) \leq 1$, 必须有 $\cos(A + B) \in (0, 1]$, $A + B \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 由上式可得:

$$\cos(A + B) \geq \sin^2 C = \frac{1 - \cos 2C}{2}$$

同理, 对于其他两对角可得:

$$\cos(B + C) \geq \sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$$

$$\cos(C + A) \geq \sin^2 B = \frac{1 - \cos 2B}{2}$$

将以上三式相加, 得:

$$\cos(A + B) + \cos(B + C) + \cos(C + A) \geq \frac{3 - (\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C)}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

令 $S = A + B + C$, 则 $A + B = S - C$, $B + C = S - A$, $C + A = S - B$ 。即 $\cos(S - A) + \cos(S - B) + \cos(S - C) \geq 1$ 。

根据 Jensen 不等式 (因为 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $\cos x$ 为凹函数) :

$$\cos \frac{(S - A) + (S - B) + (S - C)}{3} \geq \frac{\cos(S - A) + \cos(S - B) + \cos(S - C)}{3} \geq \frac{1}{3}$$

注意到 $(S - A) + (S - B) + (S - C) = 3S - (A + B + C) = 3S - S = 2S$ 。

$$\cos \frac{2S}{3} \geq \frac{1}{3}$$

因为 A, B, C 为锐角, 且余弦函数在 $(0, \pi)$ 上单调递减, 所以:

$$\frac{2S}{3} \leq \arccos \frac{1}{3}$$

$$S \leq \frac{3}{2} \arccos \frac{1}{3}$$

即 $A + B + C$ 的最大值为 $\frac{3}{2} \arccos \frac{1}{3}$ 。

(注: 当且仅当 $A = B = C$, 即 $\cos 2A = \cos 2B = \cos 2C = \frac{1}{3}$ 时等号成立。)

例9

若 $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$,

求证: $\tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma \geq 2\sqrt{2}$

取等条件显而易见 $\alpha = \beta = \gamma = \arccos \frac{1}{3}$

作恒等变形:

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

考虑到取等条件, 放心使用均值不等式:

$$\sin^2 \alpha = 2 \cos \beta \cos \gamma$$

$$\sin^2 \beta = 2 \cos \gamma \cos \alpha$$

$$\sin^2 \gamma = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

相乘开平方得 $\tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma \geq 2\sqrt{2}$

例10

求值: $\cos \frac{2}{5}\pi + \cos \frac{4}{5}\pi$

考虑:

$$\begin{aligned} & (\cos \frac{2}{5}\pi + \cos \frac{4}{5}\pi) \sin \frac{1}{5}\pi \\ &= \frac{1}{2}[(\sin \frac{3}{5}\pi - \sin \frac{1}{5}\pi) + (\sin \frac{5}{5}\pi - \sin \frac{3}{5}\pi)] = -\frac{1}{2} \sin \frac{1}{5}\pi \end{aligned}$$

所求式等于 $-\frac{1}{2}$

或者依赖于特殊角:

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\begin{aligned} & \cos \frac{2}{5}\pi + \cos \frac{4}{5}\pi \\ &= \sin 18^\circ - \cos 36^\circ \\ &= \sin 18^\circ + 2\sin^2 18^\circ - 1 \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$