培尖教育2022五一刷题班(5.1)(I)

本文为培尖教育2022五一刷题班（5.1）的复数专题复习笔记，系统梳理了复数的代数、三角、指数三种形式及几何应用（面积、共圆、相似），并通过10道典型例题详细演示了数形结合、旋转技巧、单位根求和及辐角主值处理等竞赛常用方法。

2026年6月27日 · 高联一试

复习

复数的三种形式

1. 代数形式:$z=a+bi(a,b\in R),a=\Re(z),b=\Im(z)$
2. 三角形式:$z=r(\cos\theta+i\sin\theta),(r\geq 0)$
    - $\arg(z)\in[0,2\pi)$表示幅角主值,$Arg(z)\in\mathbb{R}$表示幅角
    - $z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))$
    - $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2))$
    - $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$
    - $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}),k=0,1,2,...,n-1$
3. 指数形式:$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

复数的应用

1. $S_\triangle=\frac{1}{2}|Im(\overline{z_1}z_2+\overline{z_2}z_3+\overline{z_3}z_1)|$
2. 四点共圆的充要条件:$\frac{z_3-z_1}{z_4-z_1}:\frac{z_3-z_2}{z_4-z_2}\in R$
3. $\triangle z_1z_2z_3,\triangle w_1w_2w_3$相似的充要条件:$\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}=\frac{w_3-w_2}{w_2-w_1}$

刷题

例1

若$z\in C,|z-2|\leq 1$,求$|z|$的最大和最小值,和$\arg(z)$的范围

解:z在复平面内代表的点在圆心为$(2,0)$,半径为1的圆上.

由于有$||z|-2|\leq|z-2|\leq|z|+|2|$:

所以$-1\leq|z|-2\leq1,1\leq|z|\leq3$

由数形结合,$\arg(z)\in[0,\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{11}{6}\pi,2\pi)$

例2

复数z满足$\arg(z+3)=\frac{6}{5}\pi$,求$\min|z+6|+|z-3i|$.

解:易知$\arg(z+3)=\frac{6}{5}\pi$表示的轨迹为$y=-\frac{1}{2}(x+3)(x<-3)$

所求$|z+6|+|z-3i|$相当于z在复平面内对应点到$(-6,0),(0,3)$的距离之和.

显然$\min|z+6|+|z-3i|=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$(两点之间线段最短).

例3

已知$|z-2i|\leq1$,求$\max\arg(z-4i)$ 显然$\max\arg(z-4i)=\frac{5}{3}\pi$

例4

已知直线l过坐标原点,抛物线C的顶点在原点,焦点在x轴正半轴上,若点$A(-1,0)$和$B(0,8)$关于l的对称点都在C上,求直线l与抛物线C的方程.

设抛物线$C:y^2=2px(p>0)$,直线$l:y=kx$.

如果考虑算出对称点坐标后带入抛物线,则计算极繁.

我们建立复平面,设$\vec{OA'},\vec{OB'}$对应复数x_1+y_1i,x_2+y_2i.

显然$\vec{OA'}\perp\vec{OB'},|OA'|=1,|OB'|=8$

因此$x_2+y_2i=8i(x_1+y_1)$,于是$\begin{cases}x_2=-8y_1,\\y_2=8x_1\end{cases}$

把A',B'带入抛物线:

$$y_1^2=2px_1(1)$$
$$y_2^2=2px_2(2)$$
$$x_2=-8y_1(3)$$
$$y_2=8x_1(4)$$
$$\frac{(1)(2)}{(3)(4)}:-y_1y_2=4p^2$$
$$(1)(4):y_1^2=\frac{p}{4}y_2$$
$$y_1=-p,y_2=4p$$
$$x_1=\frac{p}{2}$$
$$x_1^2+y_1^2=(\frac{p}{2})^2+p^2=1,p=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$C:y^2=\frac{4\sqrt{5}}{5}x$$

下求直线方程:

$$x_1=\frac{\sqrt{5}}{5},y_1=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$-\frac{1}{k}=\frac{y_1-0}{x_1-(-1)}$$
$$k=\frac{x_1+1}{-y_1}=\frac{\frac{p}{2}+1}{p}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$l:y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$$

例5

若点$A(3,0),B$在椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$上,点A,B,C三点按顺时针方向排列,且$\triangle ABC$为正三角形,求点C的轨迹.

设$C(x,y)$,则由几何关系$[(x-3)+yi](\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=(x_B-3)+y_Bi$

则$\begin{cases}x_B=3+\frac{x-3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}y=\frac{x-\sqrt{3}y+3}{2}\\y_B=\frac{\sqrt{3}(x-3)}{2}+\frac{y}{2}=\frac{\sqrt{3}x+y-3\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

带入椭圆方程:

$$(\frac{x-\sqrt{3}y+3}{2})^2+4(\frac{\sqrt{3}x+y-3\sqrt{3}}{2})^2=4$$

进一步化简系数:

$$(x-\sqrt{3}y+3)^2+4(\sqrt{3}x+y-3\sqrt{3})^2=16$$

例6

设 $x,y\in R, z_1=2-\sqrt{3}x+xi, z_2=\sqrt{3}y-1+(\sqrt{3}-y)i$，已知 $|z_1|=|z_2|$，$\arg\frac{z_1}{z_2}=\frac{\pi}{2}$，

(1) 求 $\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)^{100}$

(2) 设 $z=\frac{z_1+z_2}{2}$，求集合 $A=\left\{x\mid x=z^{2k}+z^{-2k},k\in\mathbb{Z}\right\}$ 中元素的个数。

(1)

因为$\arg(\frac{z_1}{z_2})=\frac{\pi}{2},|z_1|=|z_2|$

所以$z_1=iz_2$

$$(2-\sqrt{3}x)+xi=i[(\sqrt{3}y-1)+(\sqrt{3}-y)i]$$

得:

$$\begin{cases}2-\sqrt{3}x=y-\sqrt{3},\\x=\sqrt{3}y-1\end{cases}$$

解得:

$$\begin{cases}x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

所以有:

$$\begin{cases}z_1=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i\\z_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i\end{cases}$$

于是:

$$\begin{gathered}\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)^{100}\\=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{100}\\=(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)^{100}\\=\cos 6000^\circ+i\sin 6000^\circ\\=\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ\\=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{gathered}$$

考虑$(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3=-1$计算更简便.

(2)

$$\begin{gathered}x=z^{2k}+z^{-2k}\\=(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)^{2k}+(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)^{-2k}\\=2\cos(120k)^\circ\end{gathered}$$

考虑到$k\in\mathbb{Z}$,可能的$x=2\cos(120k)$有2个.$|A|=2$

令$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

有$z=-\overline{w}$

$$\begin{gathered}x=z^{2k}+z^{-2k}\\=(-\overline{\omega})^{2k}+(-\overline{\omega})^{-2k}\\=(\overline{\omega})^{2k}+(\overline{\omega})^{-2k}\\=\omega^k+\omega^{-k}\end{gathered}$$

考虑$k=3m,3m+1,3m+2$,得到x有两个可能值.

例7

设复数 $z=\cos\theta+i\sin\theta(0<\theta<\pi),w=\frac{1-(\overline{z})^4}{1+z^4}$，并且 $|w|=\frac{\sqrt{3}}{3},\arg w<\frac{\pi}{2}$，求 θ。

$$
\begin{aligned}
&w\\
&=\frac{(1-\cos 4\theta)+i\sin 4\theta}{(1+\cos 4\theta)+i\sin 4\theta}\\
&=\frac{2\sin^2 2\theta+2\sin 2\theta\cos 2\theta i}{2\cos^2 2\theta+2\sin 2\theta\cos 2\theta i}\\
&=\tan 2\theta\frac{\sin 2\theta+i\cos 2\theta}{\cos 2\theta+i\sin 2\theta}\\
&=\tan 2\theta\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-2\theta)+i\sin(\frac{\pi}{2}-2\theta)}{\cos 2\theta+i\sin 2\theta}\\
&=\tan 2\theta[\cos(\frac{\pi}{2}-4\theta)+i\sin(\frac{\pi}{2}-4\theta)]
\end{aligned}
$$

要求:$|\tan 2\theta|=|w|=\frac{\sqrt{3}}{3}, 2\theta=\pm\frac{1}{6}\pi+k\pi$

情况1

$$\tan 2\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\theta=\frac{1}{12}\pi \text{ or } \frac{7}{12}\pi$$

$$w=\frac{\sqrt{3}}{3}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}), \arg(w)=\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$$

情况2

$$\tan 2\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\theta=\frac{5}{12}\pi \text{ or } \frac{11}{12}\pi$$

$$w=-\frac{\sqrt{3}}{3}(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi)=\frac{\sqrt{3}}{3}(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})$$

$$\arg(w)>\frac{\pi}{2}$$

综上,$\theta=\frac{1}{12}\pi \text{ or } \frac{7}{12}\pi$

例8

证明：$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$

构造一个方程:$z^7-1=0$

由棣莫弗公式:$z_k=\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7},k=0,1,2,...,6$

根据韦达定理:$z_0+z_1+z_2+...+z_6=0$

实部等于0:

$$\begin{gathered}1+\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{6}{7}\pi+\cos\frac{8}{7}\pi+\cos\frac{10}{7}\pi+\cos\frac{12}{7}\pi\\=1-2(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7})=0\end{gathered}$$

Q.E.D

如果考虑使用三角恒等变换:

$$\begin{gathered}\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\\=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\end{gathered}$$

对于同名等差角的三角函数求和,解决方法是:乘以**差角的一半的正弦的2倍**

$$\begin{gathered}2\sin\frac{\pi}{7}(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7})\\=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin 0+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{-2\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7}\\=\sin\frac{\pi}{7}\end{gathered}$$

Q.E.D

例9

化简 $\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\cdots+\sin(2n-1)x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots+\cos(2n-1)x}$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\cdots+\sin(2n-1)x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots+\cos(2n-1)x}\\
&=\frac{2\sin x[\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\cdots+\sin(2n-1)x]}{2\sin x[\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots+\cos(2n-1)x]}\\
&=\frac{-[(\cos 2x-\cos 0)+(\cos 4x-\cos 2x)+(\cos 6x-\cos 4x)+\ldots+(\cos 2nx-\cos(2n-2)x]}{(\sin 2x-\sin 0)+(\sin 4x-\sin 2x)+(\sin 6x-\sin 4x)+\ldots+(\sin 2nx-\sin(2n-2)x)}\\
&=\frac{1-\cos 2nx}{\sin 2nx}\\
&=\frac{2\sin^2 nx}{2\sin nx\cos nx}\\
&=\tan nx
\end{aligned}
$$

考虑复数的做法:令$z=\cos x+i\sin x$

于是有:$\begin{cases}\cos nx=\frac{z^n+\overline{z}^n}{2},\\ \sin nx=\frac{z^n-\overline{z}^n}{2i}\end{cases}$

所以分子:

$$
\begin{aligned}
&\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\cdots+\sin(2n-1)x\\
&=\frac{1}{2i}[(z+z^3+\ldots+z^{2n-1})-(\overline{z}+\overline{z}^3+\ldots+\overline{z}^{2n-1})]\\
&=\frac{1}{2i}[\frac{z^{2n+1}-z}{z^2-1}-\frac{\overline{z}^{2n+1}-\overline{z}}{\overline{z}^2-1}]\\
&=\frac{1}{2i}[\frac{z^{2n+1}-z}{z^2-z\overline{z}}-\frac{\overline{z}^{2n+1}-\overline{z}}{\overline{z}^2-z\overline{z}}]\\
&=\frac{1}{2i}[\frac{(z^{2n}-1)+(\overline{z}^{2n}-1)}{z-\overline{z}}]\\
&=\frac{1}{2i}\frac{(z^n-\overline{z}^n)^2}{z-\overline{z}}=(\frac{z^n-\overline{z}^n}{2i})^2\frac{2i}{z-\overline{z}}=\frac{\sin^2 nx}{\sin x}
\end{aligned}
$$

同理分母:

$$
\begin{aligned}
&\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots+\cos(2n-1)x\\
&=\frac{1}{2}[(z+z^3+\ldots+z^{2n-1})+(\overline{z}+\overline{z}^3+\ldots+\overline{z}^{2n-1})]\\
&=\frac{1}{2}[\frac{(z^{2n}-1)-(\overline{z}^{2n}-1)}{z-\overline{z}}]\\
&=\frac{1}{2}[\frac{(z^n+\overline{z}^n)(z^n-\overline{z}^n)}{z-\overline{z}}]\\
&=(\frac{z^n+\overline{z}^n}{2})(\frac{z^n-\overline{z}^n}{2})(\frac{2i}{z-\overline{z}})=\frac{\sin nx\cos nx}{\sin x}
\end{aligned}
$$

相除即得到$\tan nx$

例10

熟知:$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

使用合分比定理:

$$\frac{1+\sin\alpha-\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=\tan\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{1+2\sin\alpha-\cos\alpha}{1+\sin\alpha+2\cos\alpha}=\tan\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha}{\sqrt{2}+\sqrt{3}\sin\alpha+\sqrt{2}\cos\alpha}=\tan\frac{\alpha}{2}$$