

培尖教育2022五一刷题班(4.30)

本讲义为2022年五一培尖刷题班（4.30）的高考数学专题，聚焦解析几何（抛物线、椭圆、圆）的综合应用与解题技巧。内容涵盖圆锥曲线与直线的位置关系、切线问题、轨迹方程、面积最值、定值定点证明等核心题型。题目来源包括历年自招、高考及竞赛改编题，难度层次分明，注重计算能力与几何直观的双重训练，适合拔高阶段学生系统突破解析几何难点。

2026年6月14日 · 高考数学

例1

抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 与圆 $(x - 2)^2 + y^2 = 3$ 交于A,B两点,线段AB的中点在 $y = x$ 上,求p的值.

联立消y得:

$$\begin{aligned} & (x - 2)^2 + 2px = 3 \\ & x^2 + 2(p - 2)x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -2(p - 2) \\ \Delta = 4(p - 2)^2 - 4 > 0 \longleftrightarrow |p - 2| > 1 \end{cases} \\ & y_1^2 + y_2^2 = 2p(x_1 + x_2) = (y_1 + y_2)^2 - 2y_1 y_2 \\ & 2y_1 y_2 = (y_1 + y_2)^2 - 2p(x_1 + x_2) \\ & = (x_1 + x_2)^2 - 2p(x_1 + x_2) \\ & = 4(p - 2)^2 + 4p(p - 2) \\ & = 8p^2 - 24p + 16 \\ & y_1 y_2 = 4p^2 - 12p + 8 \\ & x_1 x_2 = \frac{(y_1 y_2)^2}{4p^2} = 1 \\ & y_1 y_2 = \pm 2p \\ & 4p^2 - 12p + 8 = \pm 2p \end{aligned}$$

接下来根据正负号不同进行讨论:

$$\begin{aligned}
 2p^2 - 7p + 4 &= 0 \\
 \Delta &= 17 > 0 \\
 p &= \frac{7 \pm \sqrt{17}}{4} \\
 p &= \frac{7 + \sqrt{17}}{4}, p - 2 = \frac{\sqrt{17} - 1}{4} < 1 \\
 &\text{舍去这个解} \\
 p &= \frac{7 - \sqrt{17}}{4}, 2 - p = \frac{\sqrt{17} + 1}{4} > 1 \\
 &\text{保留这个解}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2p^2 - 5p + 4 &= 0 \\
 \Delta &= 25 - 32 < 0 \\
 &\text{无实数解}
 \end{aligned}$$

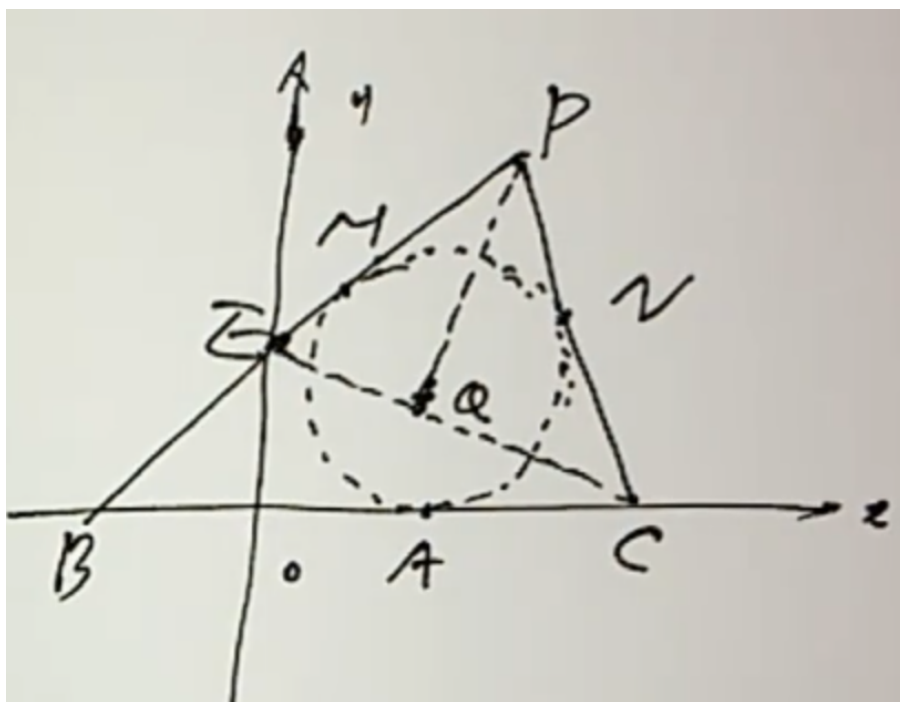
例2

(2009南京大学)在x轴上方作与x轴相切的圆,切点横坐标为 $\sqrt{3}$,过点 $B(-3, 0)$, $C(3, 0)$ 分别作圆的切线,两切线交于 P , Q 为 C 在锐角 $\angle BPC$ 角平分线上的射影.

(1)求 P 的轨迹方程,及其横坐标的取值范围.

(2)求 Q 的轨迹方程.

(1)



显然 $|PB| - |PC| = |AB| - |AC| = 3 + \sqrt{3} - (3 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

点P位于双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右支:

$$2a = 2\sqrt{3}, 2c = 3$$

$$a = \sqrt{3}, c = 3, b = \sqrt{6}$$

所以点P的轨迹方程 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1 (x > \sqrt{3})$

(2)

考虑延长CQ交PB于点E,则有 $EQ = QC, PE = PC$

又O点为线段BC的中点,故OQ为 $\triangle PBC$ 中BE边所对中线

$$OQ = \frac{BE}{2} = \frac{PB - PC}{2} = \sqrt{3}$$

寻找一下,点Q还有什么约束条件:

对于任何一个到原点距离为 $\sqrt{3}$ 的点Q($y_Q \neq 0$),总可以倍长CQ得到点E,再延长BE与EC中垂线相交得到点P,所以点Q的轨迹方程为:

$$x^2 + y^2 = 3 (y \neq 0)$$

例3

(北大自招)AB为 $y = 1 - x^2$ 上在y轴两侧的点,求过A,B的切线与x轴围成面积的最小值.

不妨设 $A(u, 1 - u^2), B(v, 1 - v^2), u < 0 < v$,点E为过A,B点切线的交点.

易知: $l_{AE}: y = -2ux + u^2 + 1, l_{BE}: y = -2vx + v^2 + 1, E(\frac{u+v}{2}, 1 - uv)$

令 $y = 0$,解得三角形在x轴上的底边长度为 $s = \frac{1}{2}(v + \frac{1}{v} - u - \frac{1}{u})$

考虑负代换:令 $t = -u > 0$,这样一石二鸟,不仅让 v, t 的符号相同,也简化了面积表达式

$$\begin{aligned} S_{\triangle} &= \frac{1}{2} s y_E = \frac{1}{4} (v + t + \frac{1}{v} + \frac{1}{t}) (1 + vt) \\ &\geq \frac{1}{2} (\sqrt{vt} + \sqrt{\frac{1}{vt}}) (1 + vt) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(vt + 1)^2}{\sqrt{vt}} \end{aligned}$$

这里对 v, t 和 $\frac{1}{v}, \frac{1}{u}$ 分组使用均值不等式,是因为通过对称性猜到了取等条件.

$$\begin{aligned} S_{\Delta} &= \frac{1}{2} \frac{(vt + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3})^2}{\sqrt{vt}} \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{(4\sqrt[4]{vt(\frac{1}{3})^3})^2}{\sqrt{vt}} = \frac{8\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

例4

过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, 抛物线的准线与 x 轴交于点 C , 若 $\angle OFA = 130^\circ$ (O 是坐标原点), 求 $\tan \angle ACB$.

$$\begin{aligned} x &= ky + 1, k = \tan 40^\circ \\ y^2 = 4x &= 4ky + 4, y^2 - 4ky - 4 = 0 \\ A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \\ \tan \angle ACB &= \frac{k_{AC} - k_{BC}}{1 + k_{AC}k_{BC}} \\ &= \frac{y_1(x_2 + 1) - y_2(x_1 + 1)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1) + y_1y_2} \\ &= \frac{y_1(ky_2 + 2) - y_2(ky_1 + 2)}{(ky_1 + 2)(ky_2 + 2) + y_1y_2} \\ &= \frac{2(y_1 - y_2)}{(k^2 + 1)y_1y_2 + 2k(y_1 + y_2) + 4} \\ &= \frac{2\sqrt{16k^2 + 16}}{(k^2 + 1)(-4) + 2k(4k) + 4} \\ &= \frac{8\sqrt{k^2 + 1}}{4k^2} \\ &= \frac{2}{k} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \\ &= \frac{2}{\tan 40^\circ} \sqrt{1 + \tan^2 50^\circ} \\ &= \frac{2}{\tan 40^\circ \cos 50^\circ} \\ &= \frac{2 \cos 40^\circ}{\cos^2 50^\circ} \end{aligned}$$

例5

求过 $y = 2x^2 - 2x - 1$ 和 $y = -5x^2 + 2x + 3$ 交点的直线方程.

$$5y + 2y = 5(2x^2 - 2x - 1) + 2(-5x^2 + 2x + 3) = -6x + 1$$

$$y = \frac{-6}{7}x + \frac{1}{7}$$

另法:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 2x - 1 = kx + b, \\ y = -5x^2 + 2x + 3 = kx + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - (k+2)x - (b+1) = 0, \\ 5x^2 + (k-2)x + (b-3) = 0 \end{cases}$$

两个方程的解应该完全相同,故方程系数对应向量平行,若存在大小为0的分量,显然推出矛盾,故:

$$\frac{2}{5} = -\frac{k+2}{k-2} = -\frac{b+1}{b-3}$$

解得: $k = -\frac{6}{7}, b = \frac{1}{7}$

例6

点A在 $y = kx$ 上,点B在 $y = -kx$ 上,其中 $k > 0$, $|OA||OB| = k^2 + 1$ 且A, B在y轴同侧.

(1)求AB中点M的轨迹方程C;

(2)曲线C与抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 相切,求证:切点分别在两条定直线上,并求出两条切线方程.

(1)

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,由 $|OA||OB| = k^2 + 1$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1^2 x_2^2 (k^2 + 1)^2} &= k^2 + 1 \\ x_1 x_2 &= 1 \\ x &= \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{k}{2}(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

联想到 $4x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2$,有:

$$4 = (2x)^2 - \left(\frac{2}{k}y\right)^2$$

$$x^2 - \frac{y^2}{k^2} = 1$$

(2)

$$\begin{cases} x^2 = 2py, \\ x^2 - \frac{y^2}{k^2} = 1 \end{cases}$$

$$y^2 - 2pk^2y + k^2 = 0$$

$$\Delta = 4p^2k^4 - 4k^2 = 0$$

$$pk = 1 (p > 0, k > 0)$$

$$y^2 - 2ky + k^2 = 0$$

$$y_1 = y_2 = k,$$

$$x^2 = 2pk = 2, x = \pm\sqrt{2}$$

所以,两切点分别在 $x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$ 上.

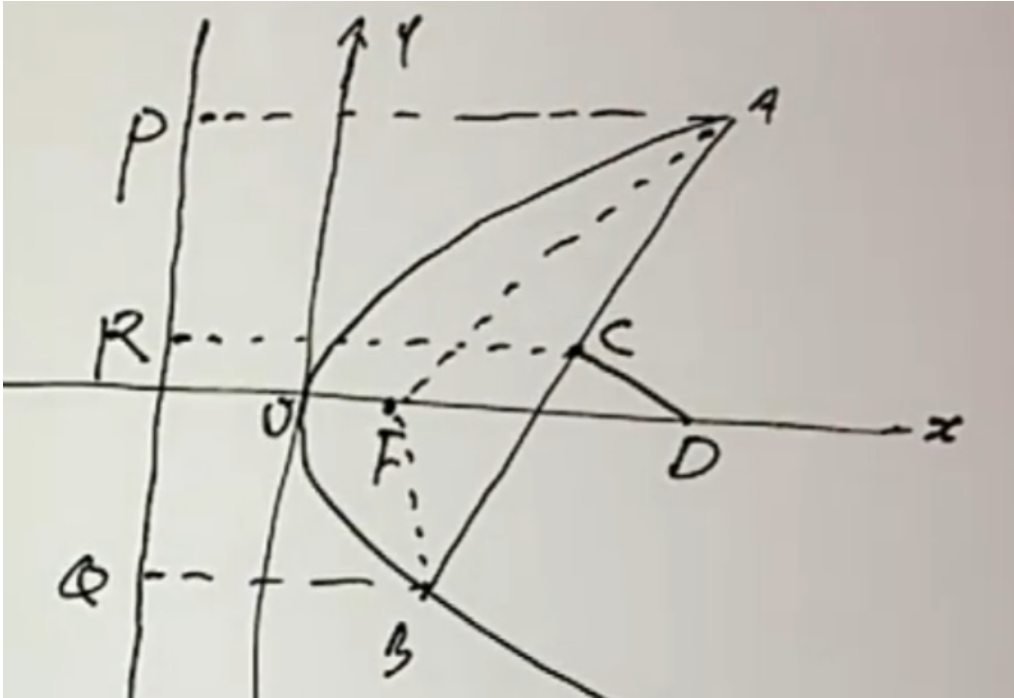
切线方程: $y = \sqrt{2}kx - k, y = -\sqrt{2}kx - k$

例7

设抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点是 F , A, B 是抛物线上互异的两点, 直线 AB 与 x 轴不垂直, 线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 $D(a, 0)$, 记 $m = |AF| + |BF|$.

(1) 证明: a 是 p 与 m 的等差中项;

(2) 设 $m = 3p$, 直线 $l \parallel y$ 轴, 且 l 被以 AD 为直径的动圆截得弦长恒为定值, 求直线 l 方程。



(1)

设点 $A(2pu^2, 2pu)$, $B(2pv^2, 2pv)$, $k_{AB} = \frac{u-v}{u^2-v^2} = \frac{1}{u+v}$

$$l_D: y = -(u+v)[x - p(u^2 + v^2)] + p(u+v)$$

令 $y = 0$, $a = x = p(u^2 + v^2 + 1)$

由抛物线定义: $m = p + 2p(u^2 + v^2)$

于是有: $m + p = 2a$

(2)

由(1): $m = p + 2p(u^2 + v^2) = 3p$, 则 $u^2 + v^2 = 1$

$$a = \frac{m+p}{2} = 2p, D(2p, 0)$$

$A(2pu^2, 2pu)$, 以AD为直径的圆方程:

$$(x - 2pu^2)(x - 2p) + (y - 2pu)y = 0$$

设 $l: x = k$, 带入圆的方程:

$$\begin{aligned}
 (k - 2pu^2)(k - 2p) + (y - 2pu)y &= 0 \\
 y^2 - 2puy + (k - 2pu^2)(k - 2p) &= 0 \\
 \Delta &= 4p^2u^2 - 4(k - 2pu^2)(k - 2p) \\
 |y_1 - y_2| &= \sqrt{\Delta} = C
 \end{aligned}$$

这要求判别式中 u 的系数为0,即 $k = \frac{3}{2}p, l : x = \frac{3}{2}p$

例8

在平面直角坐标系 xOy 中, $A(-12, 0), B(0, 6)$, 点 P 在圆 $O : x^2 + y^2 = 50$ 上, 若 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} \leq 20$, 求点 P 横坐标的范围.

$$\begin{aligned}
 P(x, y) : \vec{AP} \cdot \vec{BP} &\leq 20 \\
 (x + 12)x + y(y - 6) &\leq 20 \\
 (x + 6)^2 + (y - 3)^2 &\leq 65 \\
 O : x^2 + [(y - 3) + 3]^2 &= 50 \\
 x^2 + (y - 3)^2 + 6(y - 3) - 41 &= 0 \\
 \leq x^2 + [65 - (x + 6)^2] + 6\sqrt{65 - (x + 6)^2} - 41 \\
 \iff \sqrt{65 - (x + 6)^2} &\geq 2(x + 1) \\
 \iff \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 65 - (x + 6)^2 \leq 4(x + 1)^2 \end{cases} &\iff x \in [-1, 1] \\
 \text{or } \iff x + 1 < 0, x \in (-\infty, -1) &
 \end{aligned}$$

这样固然求出了范围 $[-5\sqrt{2}, +1]$, 但是将不等式作为条件, 难以知道代数变形是不是恒等变形. 考虑把 $x^2 + y^2 = 50$ 等式作为条件.

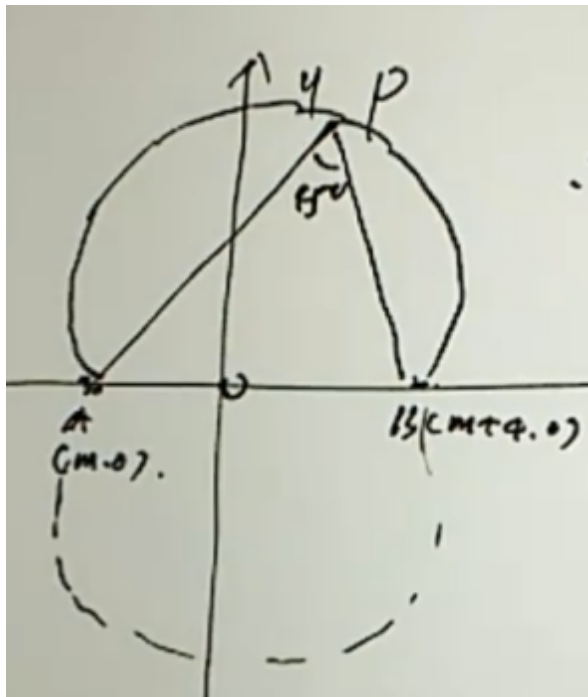
$$\begin{aligned}
& x \in [-5\sqrt{2}, 5\sqrt{2}], y \in \{-\sqrt{50-x^2}, +\sqrt{50-x^2}\} \\
& (x+12)x + y(y-6) \leq 20 \\
& (\text{case1}) y = -\sqrt{50-x^2} \\
& x^2 + 12x + (50-x^2) + 6\sqrt{50-x^2} \leq 20 \\
& 12x + 6\sqrt{50-x^2} + 30 \leq 0 \\
& 2x + \sqrt{50-x^2} + 5 \leq 0 \\
& \sqrt{50-x^2} \leq -(2x+5) \\
& \iff \begin{cases} 2x+5 \leq 0, \\ 50-x^2 \leq (2x+5)^2 \end{cases} \iff x \in [-5\sqrt{2}, -5] \\
& (\text{case2}) y = +\sqrt{50-x^2} \\
& 2x - \sqrt{50-x^2} + 5 \leq 0 \\
& \sqrt{50-x^2} \geq 2x+5 \\
& \iff \begin{cases} 2x+5 \geq 0, \\ 50-x^2 \geq (2x+5)^2 \end{cases} \iff x \in [-\frac{5}{2}, 1] \\
& \text{or } 2x+5 < 0 \iff x \in [-5\sqrt{2}, -\frac{5}{2})
\end{aligned}$$

综上, $x \in [-5\sqrt{2}, 1]$

例9

在平面直角坐标系xOy中,已知点 $A(m, 0)$, $B(m+4, 0)$,若圆 $C: x^2 + (y-3m)^2 = 8$ 上存在点P,使得 $\angle APB = 45^\circ$,则实数m的取值范围是___.

容易知道,P的轨迹是两端优弧,对应圆心分别为 $M_1(m+2, 2)$, $M_2(m+2, -2)$.



如果圆C与某个圆的劣弧相交,则必定与另一个圆的优弧相交,因而只用分别考虑圆C与上下两个圆相交即可.

$$\begin{aligned}
 \angle APB &= 45^\circ \\
 \Leftrightarrow M_1P &= 2\sqrt{2} \\
 M_1P &\in [\sqrt{(m+2)^2 + (3m-2)^2} - 2\sqrt{2}, \sqrt{(m+2)^2 + (3m-2)^2} + 2\sqrt{2}] \\
 \Leftrightarrow \sqrt{(m+2)^2 + (3m-2)^2} &\leq 4\sqrt{2} \\
 m &\in [-\frac{6}{5}, 2]
 \end{aligned}$$

同理: $\sqrt{(m+2)^2 + (3m+2)^2} \leq 4\sqrt{2}$, $m \in [-\frac{-4-2\sqrt{19}}{5}, \frac{-4+2\sqrt{19}}{5}]$

综上,两种情况合并, $m \in [-\frac{-4-2\sqrt{19}}{5}, 2]$

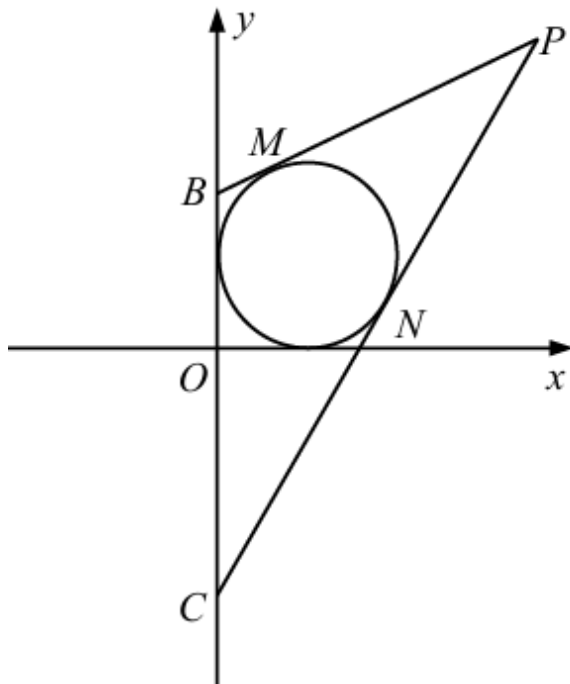
如果 $C: x^2 + (y-3m)^2 = 8$ 是一个更小的圆,可能需要考虑圆C只与劣弧相交的情况并排除.

例10

如图,在平面直角坐标系xOy中,过点 $P(2t^2, 2t+1)$ 作圆 $E: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 的两条切线PM,PN,切点分别为M,N.

(1)当 $t = 2$ 时,求直线MN的方程;

(2)当 $t \in (1, +\infty)$ 时,设切线PM,PN与y轴分别交于点B,C,求 $\triangle PBC$ 面积的最小值.



$$(1) P(8, 5), MN: 7(x-1) + 4(y-1) = 1$$

$$\text{即 } MN: 7x + 4y - 12 = 0$$

另解: 写出以PE为直径的圆方程, 与圆E利用曲线系配凑相减.

$$(2) \text{设过点P的直线为 } y = k(x - 2t^2) + 2t + 1$$

$$\text{直线与圆E相切: } d = \frac{|k(2t^2-1)-2t|}{\sqrt{1+k^2}} = 1$$

$$\text{即: } k^2 + 1 = (2t^2 - 1)^2 k^2 - 4t(2t^2 - 1)k + 4t^2$$

$$\text{化简: } 4t^2(t^2 - 1)k^2 - 4t(2t^2 - 1)k + (4t^2 - 1) = 0(*)$$

$$\Delta = 16t^2(2t^2 - 1)^2 - 16t^2(4t^2 - 1)(t^2 - 1) = 16t^4$$

设(*)的两根为 k_1, k_2 .

$$\text{令 } x = 0, y = -2t^2k + 2t + 1, \text{ 则 } |BC| = 2t^2|k_1 - k_2| = 2t^2 \frac{4t^2}{4t^2|t^2-1|} = \frac{2t^2}{|t^2-1|}, h = 2t^2$$

$$S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2}|BC|h = \frac{2t^4}{|t^2-1|} \geq 8(t = \pm\sqrt{2})$$

例11

设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 直线 $y = x + \sqrt{2}$ 与以原点为圆心、椭圆 C 的短轴长为半径的圆 O 相切。

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 如图, A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 是椭圆 C 的顶点, P 是椭圆 C 上除顶点外的任意点, 直线 B_2P 交 x 轴于点 F , 直线 A_1B_2 交 A_2P 于点 E 。设 A_2P 的斜率为 k , EF 的斜率为 m , 求证: $2m - k$ 为定值。

$$(1) b = d = 1, e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, a = 2b = 2$$

$$\text{故 } C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

(2)

解析几何证明题解答整理

已知条件: 椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (根据第一问求得)。 $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$, $B_1(0, -1)$, $B_2(0, 1)$ 为椭圆的顶点。点 P 在椭圆上异于顶点的位置, A_2P 的斜率为 k , EF 的斜率为 m 。

证明目标: $2m - k$ 为定值。

证明过程:

第一步: 确定直线 A_2P 的方程并求交点 P 的坐标 设直线 A_2P 的方程为: $y = k(x - 2)$ 由题意知 $k \neq 0$ 。联立直线与椭圆方程, 求点 P 坐标:

$$\begin{cases} y = k(x - 2) \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$$

将直线方程代入椭圆方程得:

$$x^2 + 4k^2(x - 2)^2 = 4$$

$$(4k^2 + 1)x^2 - 16k^2x + (16k^2 - 4) = 0$$

由于 A_2 是直线与椭圆的一个交点, 设其横坐标为 $x_1 = 2$, 另一交点 P 的横坐标为 x_P 。由韦达定理可得:

$$x_1 \cdot x_P = \frac{16k^2 - 4}{4k^2 + 1} \implies 2x_P = \frac{4(4k^2 - 1)}{4k^2 + 1} \implies x_P = \frac{2(4k^2 - 1)}{4k^2 + 1}$$

代入直线方程求得 P 的纵坐标:

$$y_P = k(x_P - 2) = k \left(\frac{2(4k^2 - 1)}{4k^2 + 1} - 2 \right) = k \cdot \frac{-4}{4k^2 + 1} = -\frac{4k}{4k^2 + 1}$$

所以, 点 P 的坐标为 $\left(\frac{2(4k^2 - 1)}{4k^2 + 1}, -\frac{4k}{4k^2 + 1} \right)$ 。

第二步：求点 F 的坐标 直线 B_2P 与 x 轴的交点为 $F(u, 0)$ 。由 B_2 与 P 的坐标求直线 B_2P 的斜率 k_{B_2P} ：

$$k_{B_2P} = k_{B_2F} = \frac{\frac{-4k}{4k^2+1} - 1}{\frac{2(4k^2-1)}{4k^2+1} - 0} = \frac{\frac{-4k-4k^2-1}{4k^2+1}}{\frac{2(4k^2-1)}{4k^2+1}} = \frac{-(4k^2+4k+1)}{2(4k^2-1)}$$

利用斜率公式 $k_{B_2F} = \frac{0-1}{u-0} = -\frac{1}{u}$ ，可得：

$$-\frac{1}{u} = \frac{-(4k^2+4k+1)}{2(4k^2-1)} \implies u = \frac{2(4k^2-1)}{(2k+1)^2} = \frac{2(2k-1)(2k+1)}{(2k+1)^2} = \frac{2(2k-1)}{2k+1}$$

因此，点 F 的坐标为 $\left(\frac{2(2k-1)}{2k+1}, 0\right)$ 。

第三步：求点 E 的坐标 直线 A_1B_2 的方程为： $y = \frac{1}{2}x + 1$ 联立直线 A_2P ($y = k(x-2)$) 与 A_1B_2 求交点 E ：

$$\frac{1}{2}x + 1 = k(x-2) \implies x - 2kx = -4k - 2 \implies x(1-2k) = -2(2k+1)$$

$$x = \frac{2(2k+1)}{2k-1}$$

代入 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 得：

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(2k+1)}{2k-1} + 1 = \frac{2k+1+2k-1}{2k-1} = \frac{4k}{2k-1}$$

因此，点 E 的坐标为 $\left(\frac{2(2k+1)}{2k-1}, \frac{4k}{2k-1}\right)$ 。

第四步：计算斜率 m 并证明定值 根据 E 和 F 的坐标，计算直线 EF 的斜率 m ：

$$m = \frac{y_E - y_F}{x_E - x_F} = \frac{\frac{4k}{2k-1} - 0}{\frac{2(2k+1)}{2k-1} - \frac{2(2k-1)}{2k+1}}$$

$$m = \frac{\frac{4k}{2k-1}}{\frac{2(2k+1)^2 - 2(2k-1)^2}{(2k-1)(2k+1)}} = \frac{\frac{4k}{2k-1}}{\frac{2 \cdot 8k}{(2k-1)(2k+1)}} = \frac{4k}{2k-1} \cdot \frac{(2k-1)(2k+1)}{16k} = \frac{2k+1}{4}$$

最后，计算 $2m - k$ ：

$$2m - k = 2 \left(\frac{2k+1}{4} \right) - k = \frac{2k+1}{2} - k = \frac{2k+1-2k}{2} = \frac{1}{2}$$

结论: $2m - k = \frac{1}{2}$ 为定值, 得证。

例12

(2018北京文科)已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 焦距为 $2\sqrt{2}$ 。斜率为 k 的直线 l 与椭圆 M 有两个不同的交点 A, B 。(1) 求椭圆 M 的方程; (2) 若 $k = 1$, 求 AB 的最大值; (3) 设 $P(-2, 0)$, 直线 PA 与椭圆 M 的另一个交点为 C , 直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 D 。若 C, D 和点 $Q(-\frac{7}{4}, \frac{1}{4})$ 共线, 求 k 。

$$(1) \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \quad (2) \sqrt{6}$$

$$(3) \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$$

$$\begin{cases} y = k_1(x + 2) \\ x^2 + 3y^2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (3k_1^2 + 1)x^2 + 12k_1^2x + (12k_1^2 - 3) &= 0 \\ x_1 + x_3 &= \frac{-12k_1^2}{3k_1^2 + 1} = \frac{-12(\frac{y_1}{x_1+2})^2}{3(\frac{y_1}{x_1+2})^2 + 1} = \frac{-12y_1^2}{3y_1^2 + (x_1 + 2)^2} = \frac{4x_1^2 - 12}{4x_1 + 7} \\ x_3 &= \frac{-7x_1 - 12}{4x_1 + 7}, y_3 = k_1(x_3 + 2) = \frac{-7x_1 - 12}{4x_1 + 7} \\ C &(\frac{-7x_1 - 12}{4x_1 + 7}, \frac{y_1}{4x_1 + 7}) \\ D &(\frac{-7x_2 - 12}{4x_2 + 7}, \frac{y_2}{4x_2 + 7}) \\ \vec{QC} &= (x_3 + \frac{7}{4}, y_3 - \frac{1}{4}) \\ \vec{QD} &= (x_4 + \frac{7}{4}, y_4 - \frac{1}{4}) \\ \vec{QC} \parallel \vec{QD} &: (x_3 + \frac{7}{4})(y_4 - \frac{1}{4}) = (x_4 + \frac{7}{4})(y_3 - \frac{1}{4}) \\ y_1 - x_1 - \frac{7}{4} &= y_2 - x_2 - \frac{7}{4} \\ k &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 1 \end{aligned}$$

例13

在 xOy 坐标平面, $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$, AB 边在直线 $l: x = 3$ 上移动, 求三角形 AOB 的外心轨迹方程。

设 B 在 A 的上方, $\angle XO B = \theta$

$$B(3, 3 \tan \theta), A(3, 3 \tan(\theta - \frac{\pi}{3}))$$

$$y = \frac{3}{2}(\tan \theta + \tan(\theta - \frac{\pi}{3}))$$

OA的中垂线: $y = -\cot \theta(x - \frac{3}{2}) + \frac{3}{2} \tan \theta$

故 $x = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \tan \theta \tan(\theta - \frac{\pi}{3})$

联想到正切两角差公式:

$$\begin{aligned} \tan \frac{\pi}{3} &= \frac{\tan \theta - \tan(\theta - \frac{\pi}{3})}{1 + \tan \theta \tan(\theta - \frac{\pi}{3})} \\ \sqrt{3}(1 + \tan \theta \tan(\theta - \frac{\pi}{3})) &= \tan \theta - \tan(\theta - \frac{\pi}{3}) \end{aligned}$$

但正切相减不是我们需要的形式,考虑平方:

$$\begin{aligned} 3(1 + \tan \theta \tan(\theta - \frac{\pi}{3}))^2 &= (\tan \theta - \tan(\theta - \frac{\pi}{3}))^2 \\ &= (\tan \theta + \tan(\theta - \frac{\pi}{3}))^2 - 4 \tan \theta \tan(\theta - \frac{\pi}{3}) \\ 3(2 - \frac{2}{3}x)^2 &= (\frac{2}{3}y)^2 - 4(1 - \frac{2}{3}x) \\ \frac{(x-4)^2}{4} - \frac{y^2}{12} &= 1 \end{aligned}$$

例14

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 $F(-1, 0)$, 左准线方程为 $x = -2$ 。

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 已知直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点。

① 若直线 l 经过椭圆 C 的左焦点 F , 交 y 轴于点 P , 且满足 $\overrightarrow{PA} = \lambda \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{PB} = \mu \overrightarrow{BF}$ 。

求证: $\lambda + \mu$ 为定值;

② 若 A, B 两点满足 $OA \perp OB$ (O 为坐标原点), 求 $\triangle AOB$ 面积的取值范围。

(1) $c = 1, \frac{a^2}{c} = 2, a = \sqrt{2}, b = 1, C: \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$

(2) ① 考虑焦点弦长公式: 设直线 l 的倾斜角为 θ , 则:

$$\begin{aligned}
 AF &= \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - e \cos \theta} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{2} - \cos \theta} \\
 BF &= \frac{1}{\sqrt{2} + \cos \theta} \\
 PA &= PF - AF = \frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\sqrt{2} - \cos \theta} \\
 PB &= PF + BF = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sqrt{2} + \cos \theta} \\
 \lambda &= +\frac{PA}{AF} = \frac{PF}{AF} - 1 \\
 \mu &= -\frac{PB}{BF} = -\frac{PF}{BF} - 1 \\
 \lambda + \mu &= -2 + \frac{(\sqrt{2} - \cos \theta) - (\sqrt{2} + \cos \theta)}{\cos \theta} = -4
 \end{aligned}$$

②设直线 $AB: y = kx + b$.

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2 \\ y = kx + b \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& (2k^2 + 1)x^2 + 4kbx + 2(b^2 - 1) = 0 \\
& \Delta = 8(2k^2 + 1 - b^2) > 0 \\
& x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2 + (kx_1 + b)(kx_2 + b) \\
& = (k^2 + 1)x_1x_2 + kb(x_1 + x_2) + b^2 = 0 \\
& 2(k^2 + 1)(b^2 - 1) - kb(4kb) + b^2(2k^2 + 1) = 0 \\
& 3b^2 - 2k^2 = 2 \\
& S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|b||x_1 - x_2| \\
& = \frac{1}{2}|b|\frac{\sqrt{8(2k^2 + 1 - b^2)}}{2k^2 + 1} \\
& = \frac{\sqrt{2b^2(2k^2 + 1 - b^2)}}{2k^2 + 1} \leq \frac{\sqrt{2\frac{2k^2+1}{2}}}{2k^2 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(k = \pm\sqrt{2}, b = \pm 1) \\
& \Delta = 8(2k^2 + 1 - b^2) = 8(2k^2 + 1 - \frac{2}{3}(k^2 + 1)) > 0 \\
& S_{\triangle AOB} = \frac{\sqrt{2b^2(2k^2 + 1 - b^2)}}{2k^2 + 1} \\
& = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{3}(k^2 + 1)\frac{1}{3}(4k^2 + 1)}}{2k^2 + 1} \\
& = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(k^2 + 1)(4k^2 + 1)}{(2k^2 + 1)^2}} \\
& 2k^2 + 1 = u \geq 1 \\
& S_{\triangle AOB} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(u + 1)(2u - 1)}{2u^2}} \\
& = \frac{2}{3}\sqrt{1 + \frac{1}{2u} - \frac{1}{2u^2}} \geq \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

当直线 AB 斜率不存在时, $|OA| = |OB| = \sqrt{\frac{4}{3}}, S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|OA||OB| = \frac{2}{3}(u \rightarrow 0)$

这里整理一下标答(一种不一样的设线方案):

参考答案

【名师指导】本题考查椭圆的标准方程、几何性质以及直线与椭圆的位置关系。(I)利用椭圆的几何性质求解基本量得出椭圆的标准方程;(II)(i)设出直线方程,与椭圆的方程联立,利用韦达定理、向量的坐标运算求解;(ii)利用三角形面积公式建立目标函数,再利用换元法、二次函数等求解取值范围。

解:(I)由题设知 $c = 1$,又 $\frac{a^2}{c} = 2$,即 $a^2 = 2c$, $\therefore a^2 = 2, b^2 = a^2 - c^2 = 1$, $\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 。

(II)(i)证明:由题设知直线 l 的斜率存在, $F(-1, 0)$,设直线 l 的方程为 $y = k(x + 1)$,则 $P(0, k)$ 。设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,把直线 l 的方程代入椭圆的方程得 $x^2 + 2k^2(x + 1)^2 = 2$,整理得 $(1 + 2k^2)x^2 + 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0$, $\therefore x_1 + x_2 = \frac{-4k^2}{1+2k^2}, x_1x_2 = \frac{2k^2-2}{1+2k^2}$ 。由

$$\overrightarrow{PA} = \lambda \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{PB} = \mu \overrightarrow{BF} \text{ 知, } \lambda = \frac{-x_1}{1+x_1}, \mu = \frac{-x_2}{1+x_2}, \therefore \lambda + \mu = -\frac{x_1+x_2+2x_1x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2} = -\frac{\frac{-4k^2}{1+2k^2} + \frac{4k^2-4}{1+2k^2}}{1+\frac{-4k^2}{1+2k^2} + \frac{2k^2-2}{1+2k^2}}$$

$$= -\frac{-4}{-1} = -4, \text{ 为定值.}$$

(ii) 当直线 OA, OB 分别与坐标轴重合时, 易知 $\triangle AOB$ 的面积 $S = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 当直线 OA, OB 的斜率均存在且不为零时, 设 $OA: y = kx, OB: y = -\frac{1}{k}x$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 将 $y = kx$ 代入椭圆 C 的方程, 得 $x^2 + 2k^2x^2 = 2$, $\therefore x_1^2 = \frac{2}{2k^2+1}, y_1^2 = \frac{2k^2}{2k^2+1}$, 同理, $x_2^2 = \frac{2k^2}{2+k^2}, y_2^2 = \frac{2}{2+k^2}$, $\triangle AOB$ 的面积 $S = \frac{OA \cdot OB}{2} = \sqrt{\frac{(k^2+1)^2}{(2k^2+1)(k^2+2)}}$. 令 $t = k^2 + 1 \in (1, +\infty)$, $S_{\triangle AOB} = \sqrt{\frac{t^2}{(2t-1)(t+1)}} = \sqrt{\frac{1}{2+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}}$, 令 $u = \frac{1}{t} \in (0, 1)$, 则 $S_{\triangle AOB} = \sqrt{\frac{1}{-u^2+u+2}} = \sqrt{\frac{1}{-(u-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}}} \in \left[\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 综上所述, $\triangle AOB$ 面积的取值范围为 $\left[\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.